

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

4

1 9 5 9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

МАТЕМАТИКА, ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЕ,
ПРИЛОЖЕНИЯ И ИСТОРИЯ

ВЫПУСК 4

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
КОЛЛЕДЖА НМУ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

8203

«Математическое просвещение»
выпускается при редакционном участии
И. Н. БРОНШТЕЙНА, А. М. ЛОПШИЦА, А. А. ЛЯПУНОВА,
А. И. МАРКУШЕВИЧА, И. М. ЯГЛОМА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, вып. 4

Редактор *И. Н. Бронштейн*
Технический редактор *С. Н. Ахламов*
Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 30 VII 1958 г. Подписано к печати 13/II 1959 г. Бумага 60×92^{1/16}
Физ. печ. л. 20,0. Условн. печ. л. 20,0. Уч.-изд. л. 20,0. Тираж 15000 экз. Т-00919.
Цена книги 6 руб. Заказ № 2269.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза,
Москва, Ж-54, Валоная, 28.



Яков Семенович Дубнов
на заседании семинара по векторному и тензорному анализу
14 февраля 1955 г. делает доклад на тему «Полутензоры сети»

1. ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Л. А. Люстерник

(Москва)

(Окончание)

III. Разложение функции по многочленам Чебышева

Вопрос о наилучшем *равномерном* приближении непрерывной функции $f(x)$ в интервале (a, b) многочленом данной степени был поставлен П. Л. Чебышевым. Практическим приемам нахождения такого многочлена посвящены многие работы¹⁾, к которым мы отсылаем читателя.

Естественно возникает вопрос, насколько многочлены, дающие наилучшее квадратическое приближение функции на данном интервале с тем или иным весом, дают и хорошее равномерное приближение. Оказывается, что во многих случаях наилучшее квадратическое приближение многочленами Чебышева (с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) дает и хорошее равномерное приближение, практически близкое к наилучшему²⁾.

Мы сейчас проиллюстрируем это на нескольких примерах, приведя для некоторых функций их разложения по многочленам Чебышева. Построим систему этих многочленов, применив для этой цели специальный прием.

Докажем сначала, что если $\cos \varphi = x$, то $\cos n\varphi$ есть многочлен степени n вида

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}x^n + \alpha_{n,2}x^{n-2} + \alpha_{n,4}x^{n-4} + \dots$$

(коэффициент при старшей степени равен 2^{n-1} ; многочлен будет четной или нечетной функцией в зависимости от четности n).

¹⁾ Е. Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Изд-во АН УССР, Киев, 1947; С. И. Зуховицкий, Математический сборник 33, № 2, 1953, стр. 327—342; Е. Н. Новодворский и И. Ш. Пинскер, Успехи математич. наук 6, № 6, 1951, стр. 174—181.

²⁾ См. также С. И. Зуховицкий, Математический сборник 17, 1938, стр. 123—199; А. С. Хаусхолдер, Основы численного анализа, ИЛ, М., 1956.

Проведем индукцию по числу n . Предложение справедливо при $n=1$ и при $n=2$. В самом деле, $\cos \varphi = x$, $\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = 2x^2 - 1$. Пусть это предложение справедливо для $\cos k\varphi$ при $k=1, 2, \dots, n-1, n$. Из соотношения

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi$$

получаем, что

$$\cos(n+1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi. \quad (23)$$

По предположению индукции,

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}x^n + \alpha_{n,2}x^{n-2} + \alpha_{n,4}x^{n-4} + \dots,$$

$$\cos(n-1)\varphi = 2^{n-2}x^{n-1} + \alpha_{n-1,2}x^{n-3} + \dots$$

Отсюда и из (23) следует

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\varphi &= \\ &= 2x(2^{n-1}x^n + \alpha_{n,2}x^{n-2} + \alpha_{n,4}x^{n-4} + \dots) - \\ &\quad - (2^{n-2}x^{n-1} + \alpha_{n-1,2}x^{n-3} + \dots) = \\ &= 2^n x^{n+1} + (2\alpha_{n,2} - 2^{n-2})x^{n-1} + (2\alpha_{n,4} - \alpha_{n-1,2})x^{n-3} + \dots, \end{aligned}$$

т. е. и $\cos(n+1)\varphi$ есть многочлен степени $(n+1)$ нужного нам вида.

Покажем теперь, что многочлены \bar{T}_n n -й степени, определенные по формуле

$$\bar{T}_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos nt$$

(где $\cos t = x$ или $\varphi = \arccos t$), ортогональны с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ¹⁾.

При изменении t от 0 до π $x = \cos t$ изменяется от $+1$ до -1 . Далее, при $m \neq n$

$$\int_0^\pi \cos mt \cos nt dt = 0.$$

¹⁾ Мы обозначаем введенные в рассмотрение многочлены через $\bar{T}_n(x)$ (с чертой!), чтобы отличить их от многочленов Чебышева $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке $[-1, +1]$. В литературе встречается также обозначение $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Отсюда следует (так как $t = \arccos x$, $dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$), что

$$\int_{-1}^1 \bar{T}_n(x) \bar{T}_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

т. е. система многочленов $\bar{T}_m(x)$ при $m=0, 1, 2, \dots$ образует ортогональную систему с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$ ¹⁾.

Отметим еще важное неравенство

$$|\bar{T}_n(x)| = |\cos nt| \leq 1.$$

Разложение функции $f(x)$ в ряд по многочленам Чебышева удобно производить следующим способом. Введем вспомогательную функцию $F(t)$:

$$F(t) = f(\cos t).$$

Функция $F(t)$ является четной функцией; поэтому ее ряд Фурье содержит лишь косинусы:

$$F(t) = f(\cos t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt.$$

Полагая $\cos t = x$, получаем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{T}_n(x).$$

Таким образом, коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд по многочленам Чебышева совпадают с коэффициентами Фурье функции $f(\cos t)$.

Применим указанный способ к разложению в ряд по многочленам Чебышева некоторых элементарных функций.

1. Показательная функция. Найдём разложение функции e^{ax} в ряд по многочленам Чебышева на отрезке $(-1, 1)$.

Будем исходить из формулы

$$e^{a \cos t} = I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) \cos nt^2. \quad (24)$$

¹⁾ При этом

$$\int_{-1}^1 \frac{[\bar{T}_m(x)]^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos^2 mt dt = \frac{\pi}{2} \quad (m=1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad = \pi \quad (m=0).$$

²⁾ Вывод этой формулы приведен в конце статьи (стр. 24–25).

Здесь $I_n(a)$ — так называемая функция Бесселя мнимого аргумента n -го порядка:

$$\left. \begin{aligned} I_0(a) &= 1 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16 \cdot 2^2} + \frac{a^6}{64 \cdot 6^2} + \dots + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} + \dots, \\ I_n(a) &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+2}}{(n+1)!} + \dots + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)! k!} + \dots \quad (n > 0). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Полагая $\cos t = x$, получим:

$$e^{ax} = I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) \bar{T}_n(x). \quad (24')$$

В частности, при $a=1$

$$e^x = e^{\cos t} = I_0(1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(1) \cos nt = I_0(1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(1) \bar{T}_n(x). \quad (24'')$$

Заметим, что при большом n

$$2I_n(a) = 2 \left(\frac{a^n}{2^n n!} + \frac{a^{n+2}}{2^{n+2} (n+1)!} + \dots \right) \approx \frac{a^n}{2^{n-1} n!}.$$

Таким образом, коэффициент $2I_n(a)$ при $\bar{T}_n(x)$ в (24') примерно в 2^{n-1} раз меньше коэффициента $\frac{1}{n!}$ при x^n в разложении e^{ax} в степенной ряд. Это указывает на более высокую скорость сходимости ряда (24') по сравнению со степенным рядом. (Напомним, что $|\bar{T}_n(x)| \leq 1$.)¹⁾

Формула (24') может быть использована для получения разложения в ряд по многочленам Чебышева показательных функций и с другим основанием, например, функции 2^x .

Для вычисления показательной функции 2^x в двоичной системе счисления достаточно знать 2^x для x из интервала $(0, 1)$. В самом деле, любое вещественное число z представимо в виде $z = n + x$ (n — целое и $0 \leq x < 1$); таким образом, $2^z = 2^n \cdot 2^x$, причем умножение на 2^n в двоичной системе означает лишь сдвиг запятой на n разрядов влево.

¹⁾ При не слишком большом a приведенная приближенная оценка мало отличается от строгой. Эта последняя может быть получена различными путями. Вот, например, оценка $I_n(a)$, основанная на разложении (25): $I_n(a) =$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2k}}{k! (n+1) \dots (n+k)} \leq \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2k}}{k! (n+1)^k} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n}{n!} e^{\frac{a^2}{4(n+1)}}.$$

Обозначим $2M = \ln 2 = 0,69 \dots$; $2 = e^{2M}$, $y = 2x - 1$ (при x , меняющемся от 0 до 1, y меняется от -1 до 1).

Имеем:

$$2^x = \sqrt{2} \cdot 2^{x - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot e^{2M} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{M(2x-1)} = \sqrt{2} \cdot e^{My}.$$

Отсюда, принимая во внимание (24'), получаем:

$$2^x = \sqrt{2} \cdot e^{My} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{T}_n(y),$$

где

$$a_0 = \sqrt{2} \cdot I_0(M), \quad a_n = 2\sqrt{2} \cdot I_n(M) \quad \text{при } n > 1, \quad y = 2x - 1.$$

Используя для приближенной оценки точности полученного разложения главную часть остаточного члена

$$R_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \bar{T}_k(2x-1),$$

равную n -му члену ряда $a_n \bar{T}_n(2x-1)$, получаем:

$$|R_{n-1}(x)| \approx |a_n \bar{T}_n(2x-1)| \leq |a_n| < \frac{3^{\frac{n}{2}+1} 10^{-n}}{n!}.$$

В последнем неравенстве использовано то обстоятельство, что

$$\frac{M}{2} = \frac{1}{4} \ln 2 < \sqrt{3} \cdot 10^{-1}$$

и что при больших n

$$a_n = 2\sqrt{2} \left\{ \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^{n+2}}{(n+1)! 1!} + \dots \right\} \approx 2\sqrt{2} \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^n}{n!} < 3 \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^{n+1}}{n!}.$$

Например,

$$R_5 \leq \frac{3^4 \cdot 10^{-6}}{6!} = \frac{81 \cdot 10^{-6}}{720} \approx 1,12 \cdot 10^{-7}.$$

Таким образом, с точностью порядка 10^{-7} функция 2^x может быть выражена с помощью многочлена 5-й степени:

$$2^x \approx \sum_{k=0}^5 a_k \bar{T}_k(y) = \sum_{k=0}^5 a_k \bar{T}_k(2x-1) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

¹⁾ Более строгая оценка для остаточного члена $R_{n-1}(x)$

$$R_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} 2\sqrt{2} \cdot I_k(M) I_k(2x-1)$$

дает результат, мало отличающийся от приведенного в тексте. Действи-

Далее,

$$|R_7(x)| \leq$$

$$\leq \frac{3^5 \cdot 10^{-8}}{8!} = \frac{3^4 \cdot 10^{-6}}{6!} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 8} \leq \frac{1,12}{56} \cdot 3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^{-11} \leq 10^{-10};$$

следовательно, с точностью, лучшей чем 10^{-10} , 2^x изображается на отрезке $(0, 1)$ многочленом 7-й степени:

$$2^x = \sum_{k=0}^7 a_k \bar{T}_k(y) = \sum_{k=0}^7 a_k \bar{T}_k(2x-1) = \sum_{k=0}^7 b_k x^k.$$

Аналогичные выкладки приводят еще к одному приближенному представлению 2^x в виде многочлена на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Полагая снова $y = 2x - 1$ и выбирая произвольно целое число $m \geq 1$, получаем:

$$2^{\frac{x}{m}} = 2^{\frac{1+y}{2m}} = 2^{\frac{1}{2m}} e^{\left(\frac{M}{2m}\right)y}.$$

Используя (24''), приходим к соотношению

$$2^{\frac{x}{m}} = I_0\left(\frac{M}{2m}\right) + 2^{1+\frac{1}{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{M}{2m}\right) \bar{T}_k(2x-1).$$

тельно,

$$\begin{aligned} |R_{n-1}(x)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} 2\sqrt{2} \cdot I_k(M) \leq 2\sqrt{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{M}{2}\right)}{k!} e^{\left(\frac{M}{2}\right)^2/(k+1)} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2} \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^n}{n!} e^{\left(\frac{M}{2}\right)^2/(n+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^s}{(n+1) \dots (n+s)} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2} \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^n}{n!} e^{\left(\frac{M}{2}\right)^2/(n+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^s}{(n+1)^s} = 2\sqrt{2} \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^n}{n!} e^{\left(\frac{M}{2}\right)^2/(n+1)} \frac{1}{1 - \frac{M}{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

Полученный в результате этой оценки дополнительный множитель

$$\sigma = e^{\left(\frac{M}{2}\right)^2/(n+1)} : \left[1 - \frac{M}{2(n+1)}\right] \text{ имеет значение, близкое к единице:}$$

$$\sigma < e^{3 \cdot 10^{-2}/(n+1)} : \left[1 - \frac{\sqrt{3} \cdot 10^{-1}}{n+1}\right].$$

Выделяя в этом разложении первые $n-1$ членов, получаем:

$$2^{\frac{x}{m}} = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x),$$

где

$$R_{n-1}(x) \approx 2^{1+\frac{1}{2m}} I_n \left(\frac{M}{2m} \right) \bar{T}_n(2x-1).$$

Отсюда

$$|R_{n-1}(x)| \leq 2^{1+\frac{1}{2m}} \frac{3^{\frac{n}{2}} \cdot 10^{-n}}{m^n \cdot n!}.$$

Далее,

$$[P_{n-1}(x)]^m = [2^{\frac{x}{m}} + R_{n-1}(x)]^m = 2^x + m 2^{\frac{x}{m} \cdot \frac{m-1}{m}} R_{n-1}(x) + \dots,$$

т. е.

$$2^x = [P_{n-1}(x)]^m + \epsilon_{n-1}.$$

Ошибка ϵ_{n-1} с точностью до малых высших порядков не превосходит $2^{1-\frac{1}{m}} |R_{n-1}(x)|$, т. е.

$$\epsilon_{n-1} \leq 2^{1-\frac{1}{m}} \cdot 2^{1+\frac{1}{2m}} \frac{3^{\frac{n}{2}} \cdot 10^{-n}}{m^{n-1} n!} = 2^{2-\frac{1}{2m}} \frac{3^{\frac{n}{2}} \cdot 10^{-n}}{m^n \cdot n!}.$$

Пусть, например, $m=8$, $n=5$. Тогда при $0 \leq x \leq 1$

$$2^{2-\frac{1}{16}} \frac{3^{2\frac{1}{2}} \cdot 10^{-5}}{8^5 \cdot 5!} < 10^{-7} < 1,4 \cdot 10^{-9}.$$

Итак, с точностью до $1,4 \cdot 10^{-9}$ 2^x на интервале $[0, 1]$ представима 8-й степенью от многочлена 4-й степени [возвышение в 8-ю степень получается трехкратным возведением в квадрат¹⁾].

2. Логарифм. В качестве другого примера рассмотрим логарифмическую функцию, для которой степенные ряды дают плохую сходимость.

Формулу

$$\ln(1+h) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n} \quad (|h| < 1)$$

применим к $h = pe^{i\varphi}$, где p — положительное действительное число, меньшее единицы (напомним, что $|e^{i\varphi}| = 1$; таким образом, $p = |h|$).

¹⁾ Именно так считается функция 2^x на машине Вычислительного центра МГУ. См. также В. С. Линский, Вычисление элементарных функций на автоматических цифровых машинах. Вычислительная математика, вып. 2 (1957), стр. 101—102.

Получим:

$$\ln(1 + pe^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{p^n e^{in\varphi}}{n}. \quad (26)$$

Вычислим вещественную часть этого логарифма. С одной стороны, в силу формулы Эйлера

$$e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Поэтому мы можем написать

$$R[\ln(1 + pe^{i\varphi})] = R\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{p^n e^{in\varphi}}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{p^n \cos n\varphi}{n}. \quad (27)$$

С другой стороны, имея в виду известное из теории функций комплексного переменного соотношение $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, получим:

$$\begin{aligned} R[\ln(1 + pe^{i\varphi})] &= \ln |1 + p(\cos \varphi + i \sin \varphi)| = \\ &= \ln \sqrt{(1 + p \cos \varphi)^2 + p^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \ln(1 + p^2 + 2p \cos \varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + p^2 + 2p \cos \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{p^n \cos n\varphi}{n}. \quad (29)$$

Заменяя p на $-p$, получим

$$\frac{1}{2} \ln(1 + p^2 - 2p \cos \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n \cos n\varphi}{n}; \quad (29')$$

вычитая почленно (29') из (29), получим:

$$\ln \frac{1 + p^2 + 2p \cos \varphi}{1 + p^2 - 2p \cos \varphi} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{2k+1}}{2k+1} \cos(2k+1)\varphi$$

(при вычитании в правых частях четные степени сократятся, а нечетные удвоятся).

Обозначая $\cos \varphi = z$, получим:

$$\ln \frac{1 + p^2 + 2pz}{1 + p^2 - 2pz} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{2k+1}}{2k+1} \bar{T}_{2k+1}(z). \quad (30)$$

¹⁾ $R(z)$ означает вещественную часть комплексного числа z .

Переменная z в формуле (30) меняется от -1 до 1 . При этом выражение $U(z) = \frac{1+p^2+2pz}{1+p^2-2pz}$ меняется от a_0 до a_1 , где

$$a_0 = \left(\frac{1-p}{1+p} \right)^2, \quad a_1 = \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^2.$$

Пользуясь тем, что любое вещественное число представимо в виде $y = 2^n x$ ($1 \leq x < 2$) и, следовательно,

$$\ln y = n \ln 2 + \ln x,$$

мы можем ограничиться выводом формулы для логарифмов чисел x из интервала $[1, 2]$. Положим

$$\frac{a_1}{a_0} = 2, \text{ т. е. } \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^4 = 2.$$

Отсюда

$$\frac{1+p}{1-p} = \sqrt[4]{2} \approx 1,2, \text{ т. е. } p \approx 0,1.$$

При этом

$$U(1) = \sqrt{2}, \text{ а } U(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

С точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-9}$ мы можем в разложении (30) для $\ln z$ ограничиться четырьмя членами. Действительно, при $s=4$

$$4 \frac{p^{2s+1}}{2s+1} \approx \frac{4}{9} \cdot 10^{-9} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-9}.$$

Таким образом, с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-9}$,

$$\begin{aligned} \ln U(z) &= \ln \frac{1+p^2+2pz}{1+p^2-2pz} = 4 \sum_{s=0}^3 \frac{p^{2s+1}}{2s+1} \bar{T}_{2s+1}(z) = \\ &= a_0 T_1(z) + a_1 \bar{T}_2(z) + a_2 \bar{T}_3(z) + a_3 \bar{T}_7(z), \end{aligned} \quad (31)$$

т. е. логарифм от $\frac{1+p^2+2pz}{1+p^2-2pz}$ выражается, с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-9}$, нечетным многочленом 7-й степени от z :

$$\ln U(z) = \ln \frac{1+p^2+2pz}{1+p^2-2pz} = b_1 z + b_2 z^3 + b_3 z^5 + b_4 z^7. \quad (31')$$

Пусть $1 \leq x < 2$; так как $U(z)$ меняется в пределах от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до $\sqrt{2}$, то подберем по заданному x такое z , чтобы

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = U(z) = \frac{1+p^2+2pz}{1+p^2-2pz}.$$

Решая это уравнение относительно z , находим

$$z = \frac{x - \sqrt{2}}{a(x + \sqrt{2})}, \quad a = \frac{2p}{1+p^2} \approx \frac{0,2}{1,01}. \quad (32)$$

Итак, по данному x ($1 < x < 2$) мы находим по формуле (32) z ($-1 < z < 1$); подставляя z в формулу (31), находим $\ln x = \ln U(z) + \frac{1}{2} \ln 2$.

Примечание. Для десятичных логарифмов естественно искать логарифмы из интервала (1, 10), в частности, полагать

$$\frac{a_1}{a_0} = 10, \text{ т. е. } \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^4 = 10, \quad \frac{1+p}{1-p} = \sqrt[4]{10} \approx 1,78...; \quad p = \frac{0,78}{2,78} = 0,28...$$

При $s=8$, $p=0,28$ получаем $\frac{4p^{2s+1}}{2s+1} < \frac{1}{4} 10^{-9}$.

Поэтому с точностью до $\frac{1}{4} 10^{-9}$ имеем (при $p \approx 0,28$) на интервале (1, 10) разложение, аналогичное (31), но содержащее 8 членов (для $s=0, 1, 2, \dots, 7$).

Рассмотрим теперь представление логарифма x непосредственно в виде многочлена. Пусть x пробегает интервал (2, 4). Представим x в виде

$$x = 3 + z,$$

где $z = x - 3$ пробегает интервал $(-1, 1)$. Из формулы (29) с заменой $z = \cos \varphi$ следует:

$$\ln(1 + p^2 + 2pz) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} p^n}{n} \bar{T}(z), \quad (29'')$$

$$\ln(1 + p^2 + 2pz) = \ln \left[\frac{1+p^2}{3} \left(3 + \frac{6p}{1+p^2} z \right) \right] = \ln \frac{1+p^2}{3} - \ln \left(3 + \frac{6p}{1+p^2} z \right).$$

Если $\frac{6p}{1+p^2} = 1$, то $p = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,17...$, $\frac{1+p^2}{3} = 2p \approx 0,34...$ и

$$\ln(1 + p^2 + 2pz) = \ln 0,34... + \ln(3 + z) = \ln 0,34... + \ln x.$$

Отсюда и из (29'') получаем:

$$\ln x = -\ln 0,34... + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} p^n}{n} \bar{T}_n(x-3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{T}_n(x-3),$$

где $a_0 = -\ln 0,34...$, $a_n = \frac{(-1)^{n-1} (2p)^n}{n}$ ($p=0,17$).

3. Синус и косинус. Для разложения синуса и косинуса в ряд по многочленам Чебышева будем пользоваться бесселевыми функциями

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+k}}{m! (m+k)!},$$

связанными с уже использовавшимися нами функциями Бесселя мнимого аргумента $I_k(x)$ соотношением

$$I_k(ix) = i^k J_k(x).$$

Отсюда и из (24) следует

$$e^{iaz} = \cos az + i \sin az = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(a) \bar{T}_k(z).$$

Приравнявая вещественные и мнимые части, получим

$$\cos az = J_0(a) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_{2s}(a) \bar{T}_{2s}(z),$$

$$\sin az = 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}(a) \bar{T}_{2s+1}(z).$$

Полагая, например, $a = \frac{\pi}{4}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} z &= J_0\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_{2s}\left(\frac{\pi}{4}\right) \bar{T}_{2s}(z), \\ \sin \frac{\pi}{4} z &= 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}\left(\frac{\pi}{4}\right) \bar{T}_{2s+1}(z). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Заметим, что при большом m

$$J_m\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^m}{m!} - \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{m+2}}{(m+1)!} + \dots < \left(\frac{\pi}{8}\right)^m \frac{1}{m!}.$$

В частности, так как $\pi^2 < 10$; $2^{10} = 1024 > 10^3$; $10! = 3\,628\,800 > 3,6 \cdot 10^6$, то

$$2J_{10}\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{2}{10!} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{10} < \frac{2 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^6 \cdot 10^9} < 10^{-10}.$$

Итак, с точностью до 10^{-10} , имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} z\right) = J_0\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \sum_{s=1}^4 (-1)^s J_{2s}\left(\frac{\pi}{4}\right) \bar{T}_{2s}(z), \quad (33')$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} z\right) = 2 \sum_{s=1}^4 (-1)^s J_{2s+1}\left(\frac{\pi}{4}\right) \bar{T}_{2s+1}(z). \quad (33'')$$

Так как многочлены $\bar{T}_{2s}(z)$ содержат члены только четной степени z ,

а многочлены $\bar{T}_{2s+1}(z)$ — только нечетной степени, то из (33') следует, что с точностью до 10^{-10} имеем:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} z &= a_0 + a_1 z^2 + a_2 (z^2)^2 + a_3 (z^2)^3 + a_4 (z^2)^4, \\ \sin \frac{\pi}{4} z &= z [b_0 + b_1 z^2 + b_2 (z^2)^2 + b_3 (z^2)^3 + b_4 (z^2)^4].\end{aligned}$$

4. Арктангенс. Воспользуемся следующим представлением для арктангенса

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+zi}{1-zi}. \quad (34)$$

Воспользуемся снова формулой (31). Заменяя p на pi , получаем:

$$\ln \frac{1-p^2+2piz}{1-p^2-2piz} = \ln \frac{1+\frac{2p}{1-p^2}zi}{1-\frac{2p}{1-p^2}zi} = 4i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{2k+1}}{2k+1} \bar{T}_{2k+1}(z). \quad (34')$$

Положим $\frac{2p}{1-p^2} = 1$; отсюда

$$p = \sqrt{2} - 1 = 0,41 \dots$$

Тогда из (34) и (34') следует:

$$\operatorname{arctg} z = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{2k+1}}{2k+1} \bar{T}_{2k+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \bar{T}_{2k+1}(z),$$

где

$$b_k = \frac{(-1)^k \cdot 2 \cdot (0,41)^{2k+1}}{2k+1}.$$

Для b_{10} получаем оценку

$$|b_{10}| < \frac{1}{10} \cdot 0,41^{21} < 10^{-9}.$$

Таким образом, с точностью до 10^{-9} при $-1 \leq z \leq 1$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{k=0}^9 b_k \bar{T}_{2k+1}(z).$$

¹⁾ Это соотношение следует немедленно из формулы Эйлера:

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \\ ix &= \ln(\cos x + i \sin x), \quad -ix = \ln(\cos x - i \sin x), \\ x &= \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i \operatorname{tg} x}{1-i \operatorname{tg} x}.\end{aligned}$$

Пологая $z = \operatorname{tg} x$, получаем (34).

Так как все многочлены $\bar{T}_{2k+1}(z)$ — нечетные, то

$$\operatorname{arctg} z = z \sum_{k=0}^9 a_k (z^2)^k.$$

5. Бесселева функция $J_0(z)$. Будем исходить из формулы¹⁾

$$J_0(p \sin \alpha) = \left[J_0\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_k\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2 \cos 2k\alpha. \quad (35)$$

Обозначим $t = \sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Тогда

$$\cos 2k\alpha = (-1)^k \cos(2k\alpha + k\pi) = (-1)^k \cos\left[2k\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right];$$

поэтому

$$\cos 2k\alpha = (-1)^k \bar{T}_{2k}(t).$$

Формула (35) запишется в виде

$$J_0(pt) = \left[J_0\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[J_k\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2 \bar{T}_{2k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \bar{T}_{2k}(t),$$

где

$$b_0 = \left[J_0\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2, \quad b_k = (-1)^k \cdot 2 \left[J_k\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2.$$

Обозначая $pt = z$, получаем: на отрезке $-p \leq z \leq p$

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \bar{T}_{2k}\left(\frac{z}{p}\right).$$

Заметим, что при $k \geq \left(\frac{p}{4}\right)^2$

$$J_k\left(\frac{p}{2}\right) = \left(\frac{p}{4}\right)^k \left[\frac{1}{k!} - \frac{\left(\frac{p}{4}\right)^2}{(k+1)!} + \dots \right] \leq \left(\frac{p}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}.$$

Полагая, например, $p = 8$, имеем

$$|b_{12}| = 2[J_{12}(4)]^2 \leq 2\left(2^{12} \cdot \frac{1}{12!}\right)^2 = \frac{2^{24}}{(12!)^2}.$$

Так как $12! > 4,75 \cdot 10^8$, $(12!)^2 > 2,2 \cdot 10^{17}$, $2^{24} \approx 10^{7,5}$, то

$$|b_{12}| < 1,4 \cdot 10^{-10}.$$

¹⁾ Вывод ее можно найти в книге: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, М., 1953.

Таким образом, с точностью до $1,4 \cdot 10^{-10}$ на отрезке $(-8, 8)$

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{11} b_k T_{2k}\left(\frac{z}{8}\right).$$

Так как все многочлены T_{2k} суть четные многочлены от $\frac{z}{8}$, а значит, и от z , то с этой точностью на отрезке $(-8, 8)$

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{11} c_k (z^2)^k.$$

С той же точностью на отрезке $(-4, 4)$ $J_0(z)$ выражается многочленом 8-й степени от z^2 .

IV. Итерационные методы

Одними из важнейших и старейших методов вычисления функций являются *итерационные методы*. Уравнение, равносильное уравнению $y=f(x)$, решается при заданном x относительно y с помощью сходящегося рекуррентного процесса, позволяющего при выбранном начальном значении $y=y_0$ получать последовательные значения $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, стремящиеся к искомому значению y . Описание применяемых при решении уравнений, а значит, и при определении значений функций итерационных методов можно найти, например, в книге А. С. Хаусхолдера¹⁾.

Мы ограничимся несколькими «классическими» примерами, широко применяющимися в стандартных программах, именно приемами вычисления функций \sqrt{x} , $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и $\frac{1}{x}$. При этом мы будем предполагать, что выбор начальных приближений делается «на глаз» — отнюдь не наилучшим образом.

Вычисление этих функций основано на методе Ньютона (мы считаем его известным) нахождения корней уравнения $F(y)=0$, который сводится к вычислению при выбранном значении y_0 последовательных значений

$$y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1},$$

где

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(y_n)}{F'(y_n)}.$$

Если уравнение относительно y задано в виде $f(x, y)=0$ (x известно), то эта формула принимает вид

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(x, y_n)}{f'_y(x, y_n)}. \quad (36)$$

¹⁾ См. примечание ²⁾ на стр. 3.

Известно, что погрешности $\epsilon_n = y - y_n$ [y — точное решение уравнения $f(x, y) = 0$] для сходящегося метода Ньютона быстро стремятся к нулю, причем ϵ_{n+1} есть величина порядка ϵ_n^2 .

1. Извлечение корня. На машинах, в которых деление входит в число элементарных операций, при вычислении значений $y = \sqrt{x}$ по заданному x исходят из уравнения

$$f(x, y) = y^2 - x = 0 \quad (1 \leq x \leq 2).$$

Так как $f'_y = 2y$, то формула (36) дает

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(x, y)}{f'_y(x, y)} = y_n - \frac{y_n^2 - x}{2y_n} = y_n - \frac{y_n}{2} + \frac{x}{2y_n} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right).$$

Таким образом,

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right). \quad (37)$$

Исходя из выбранного y_0 , строим по формуле (37) последовательно y_1, y_2, y_3, \dots

Вычислим, с какой точностью получается значение \sqrt{x} после $n+1$ итераций.

Обозначим

$$\epsilon_n = y - y_n.$$

Из (37) имеем:

$$\epsilon_{n+1} = y - y_{n+1} = y - \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right) = \frac{2yy_n - y_n^2 - x}{2y_n}.$$

Замечая, что $x = y^2$ и что $y_n = y - \epsilon_n$, получаем:

$$\epsilon_{n+1} = \frac{2y(y - \epsilon_n) - (y - \epsilon_n)^2 - y^2}{2y_n} = -\frac{\epsilon_n^2}{2y_n}.$$

Таким образом,

$$|\epsilon_{n+1}| = \frac{\epsilon_n^2}{2y_n}.$$

Учитывая, что $y_n > 1$, получаем:

$$\left| \frac{\epsilon_{n+1}}{2} \right| < \left(\frac{\epsilon_n}{2} \right)^2.$$

Из последнего неравенства следует

$$\left| \frac{\epsilon_{n+1}}{2} \right| < \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right)^{2^{n+1}}$$

Возьмем, например, в качестве y_0 середину интервала $(1, \sqrt{2})$, в котором изменяется y при $1 \leq x \leq 2$: $y = 1,207\dots$ Тогда $|\epsilon_0| < 0,207\dots$, $\left|\frac{\epsilon_0}{2}\right| < 0,104\dots$ и $\epsilon_n < 2 \cdot (0,104)^{2^n}$. Например,

$$\epsilon_4 < 2 \cdot (0,104)^{16} < 2,1 \cdot 10^{-16}.$$

2. Нахождение $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Описанный выше метод неудобен для машин, в которых нет деления. В таких машинах (например, в машине «Стрела») обычно вычисляют сначала $\frac{1}{\sqrt{x}}$, что легко проводится без деления, а затем, умножив на x , находят $\sqrt{x} = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Для вычисления $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ по заданному x исходят из уравнения

$$f(x, y) = x - \frac{1}{y^2} = 0.$$

Тогда

$$f'_y(x, y) = \frac{2}{y^3} \text{ и } \frac{f(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{y^3 x - y}{2}.$$

Выбрав начальное приближение y_0 , находим следующие приближения по формуле (36), которая принимает вид

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^3 x - y_n}{2} = \frac{y_n}{2} (3 - y_n^2 x). \quad (38)$$

Пусть x изменяется в интервале $(1, 2)$; тогда $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ изменяется в интервале $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70, \dots, 1\right)$. Примем, например, в качестве начального приближения $y_0 = 0,85$. Тогда $\epsilon_0 = |y - y_0| \leq 0,15$.

Оценим $\epsilon_n = y - y_n$. Так как $y_n = y - \epsilon_n$, $x = \frac{1}{y^2}$, то

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{y_n}{2} (3 - y_n^2 x) = \frac{y - \epsilon_n}{2} \left[3 - \frac{(y - \epsilon_n)^2}{y^2} \right] = \\ &= \frac{y - \epsilon_n}{2} \left[\frac{3y^2 - y^2 + 2y\epsilon_n - \epsilon_n^2}{y^2} \right] = \frac{(y - \epsilon_n)(2y^2 + 2y\epsilon_n - \epsilon_n^2)}{2y^2} = \\ &= (y - \epsilon_n) \left[\frac{y + \epsilon_n}{y} - \frac{\epsilon_n^2}{2y^2} \right] = \frac{y^2 - \epsilon_n^2}{y} - \frac{y\epsilon_n^2}{2y^2} + \frac{\epsilon_n^3}{2y^2} = -\frac{3\epsilon_n^2}{2y} + \frac{\epsilon_n^3}{2y^2} + y. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varepsilon_{n+1} = y - v_{n+1} = \frac{3\varepsilon_n^2}{2y} - \frac{\varepsilon_n^2}{2y^2}$, $|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{3|\varepsilon_n|^2}{2y} + \frac{|\varepsilon_n|^3}{2y^3}$.

Так как $y \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $2y \geq \sqrt{2}$, $2y^2 \geq 1$; следовательно,

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \varepsilon_n^2 + |\varepsilon_n|^3 = \varepsilon_n^2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + |\varepsilon_n| \right) \leq \varepsilon_n^2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + |\varepsilon_0| \right).$$

Так как $|\varepsilon_0| \leq 0,15$, то

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq 2,3\varepsilon_n^2.$$

Окончательно

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{(2,3)^{2^{n+1}}}{2,3} \varepsilon_0^{2^{n+1}} < \frac{(0,35)^{2^{n+1}}}{2,3}.$$

Например, при $n=4$ получаем

$$|\varepsilon_5| < \frac{10^{-14}}{2,3}.$$

3. Вычисление обратной величины. Для вычисления обратной величины y от заданного x ($y = \frac{1}{x}$) при $1 \leq x \leq 2$ пользуются уравнением

$$f(x, y) = x - \frac{1}{y} = 0,$$

откуда

$$f'_y = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{f(x, y)}{f'_y(x, y)} = y^2 x - y = y(xy - 1).$$

Отсюда в силу (36)

$$y_{n+1} = y_n - y_n(xy_n - 1)$$

или

$$y_{n+1} = y_n(2 - xy_n). \quad (39)$$

Когда x пробегает интервал $(1, 2)$, то $y = \frac{1}{x}$ пробегает интервал $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Приняв, например, $y_0 = \frac{3}{4}$ и, следовательно, $|\varepsilon_0| \leq \frac{1}{4}$, строим по формуле (39), последовательно, y_1, y_2, \dots

Полагаем $y_n = y - \varepsilon_n$, $y_{n+1} = y - \varepsilon_{n+1}$; следовательно (так как $xy = 1$) $xy_n = xy - x\varepsilon_n = 1 - x\varepsilon_n$.

Из (39) имеем:

$$y - \varepsilon_{n+1} = (y - \varepsilon_n)[2 - (1 - x\varepsilon_n)] = y - \varepsilon_n + xy\varepsilon_n - x\varepsilon_n^2 = y - x\varepsilon_n^2,$$

$$\varepsilon_{n+1} = x\varepsilon_n^2,$$

откуда (так как $x \leq 2$)

$$0 \leq \varepsilon_{n+1} = x\varepsilon_n^2 \leq 2\varepsilon_n^2.$$

Так как $\varepsilon_0 \leq \frac{1}{4} = 2^{-2}$, то из неравенства $0 < \varepsilon_n \leq 2^{2^n - 1} \varepsilon_0^{2^n}$ получаем:

$$\varepsilon_n \leq 2^{-(2^n + 1)}.$$

В частности,

$$0 \leq \varepsilon_8 \leq 2^{-88}.$$

Число итераций, необходимых для получения нужной точности, уменьшается, если для нахождения первого приближения пользуются какой-нибудь приближенной формулой (например, линейной аппроксимацией функции \sqrt{x} , $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$ на соответственном интервале)¹⁾.

В заключение статьи приведем краткие сведения о некоторых других методах представления функций.

V. Асимптотические представления

Одним из важных методов вычисления значений функции является использование их асимптотических разложений.

Пусть функция $f(x)$ представима на отрезке $[-N, N]$ степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(где x принадлежит интервалу сходимости этого ряда). Для любого n имеем:

$$f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k = R_n(x); \quad (40)$$

остаток R_n удовлетворяет неравенству

$$|R_n(x)| \leq M_n x^{n+1}, \quad (40')$$

где M_n не зависит от x (можно положить M_n равным максимуму значений $\frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(x)|$ на отрезке $[-N, N]$).

Пусть теперь задана функция $\varphi(x)$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, который мы *не предполагаем сходящимся*, и пусть для любого x , принадлежащего

¹⁾ См. статью В. С. Линского, цитированную на стр. 9.

некоторому интервалу $-N < x < N$, и любого натурального n существует положительное число C_n , не зависящее от x , такое, что

$$|R_n(x)| \leq C_n x^{n+1}, \quad (41)$$

где $R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^n b_k x^k$.

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ называется *асимптотическим* для функции $\varphi(x)$.

Любой сходящийся степенной ряд, представляющий на соответственном интервале функцию, является для нее асимптотическим [в силу (40) и (40')]. Но асимптотический ряд (как мы покажем на простом примере) может и не сходиться; однако из формулы (41) видно, что при *фиксированном* n и достаточно малых по абсолютной величине значениях x конечные суммы асимптотического ряда дают сколь угодно хорошее приближение к значению функции. Для нахождения значений функции при больших по модулю значениях x особенно часто пользуются асимптотическими рядами по степеням $\frac{1}{x}$.

Пусть ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}$$

есть асимптотический для функции $F(x)$; это значит, что существует константа $N > 0$ такая, что при $|x| > N$ для любого натурального n существует не зависящее от x число $d_n > 0$ такое, что

$$|R_n(x)| = \left| F(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} \right| < \frac{d_n}{|x^{n+1}|}. \quad (42)$$

В практике часто встречаются случаи, когда в формуле (42) $d_n = |a_{n+1}|$, т. е.

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} \right| = |u_{n+1}(x)|. \quad (43)$$

Ошибка от замены функции конечной суммой такого асимптотического ряда по модулю меньше первого отбрасываемого члена.

Приведем сейчас простой пример расходящегося асимптотического ряда. В теории вероятностей имеет широкое применение функция

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Так как $\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Для того чтобы находить значения $\operatorname{erf}(x)$ при больших $|x|$, найдем асимптотическое разложение функции

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

а затем воспользуемся соотношением

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x).$$

Можно доказать, что асимптотическим рядом для $\varphi(x)$ является ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_0(x) = \frac{1}{x}$; $u_n(x) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot x^{-(2n+1)}$ ($n \geq 1$).

Мы покажем (см. стр. 25—26), что

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \varphi(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \\ &\leq |u_{n+1}(x)| = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot x^{-(2n+1)} \end{aligned} \quad (44)$$

(ошибка по модулю меньше первого отбрасываемого члена). При любом фиксированном n эта ошибка для достаточно больших $|x|$ может быть сделана сколь угодно малой. Например, если положить

$$\varphi(x) \approx u_0 + u_1 + u_2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5},$$

то ошибка R_2 будет по модулю меньше, чем

$$|u_3(x)| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^7}.$$

При $|x| > 10$ эта ошибка по модулю меньше $1,5 \cdot 10^{-6}$; при $x > 30$ она меньше чем 10^{-10} .

В то же время ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ расходится при любом x . В этом легко убедиться, применив признак Даламбера:

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{2n+1}{x^2}.$$

При $n > \frac{x^2}{2}$ $\frac{2n+1}{x^2} > 1$.

При больших значениях x выражения $|u_0| = \frac{1}{x}$, $|u_1| = \frac{1}{x^3}$, ...
..., $|u_n|$, ... сначала убывают, а вместе с ними убывает и оцениваемая ими ошибка $|R_n(x)|$ в формуле (44); но, когда n станет больше, чем $\frac{x^2}{2}$, $|u_n(x)|$ начинает неограниченно возрастать.

VI. Рациональные приближения

Скажем теперь несколько слов о *рациональных приближениях*. Основным источником их являются непрерывные дроби вида

$$\frac{a_0}{b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}},$$

в которых a_i и b_i суть многочлены.

В свое время вопросами разложения функций в непрерывные дроби занимались крупнейшие математики: Эйлер, Лагранж и др. Но в настоящем столетии вопрос о представлении функций непрерывными дробями оказался несправедливо забытым. Между тем во многих случаях непрерывные дроби дают быстро сходящийся аппарат представления функций с просто образуемыми коэффициентами, например, классические разложения Ламберта¹⁾:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \dots}}}},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}.$$

Недавно в «Библиотеке прикладного анализа и вычислительной математики» вышла книжка А. Хованского²⁾, содержащая большое количество представлений разных функций непрерывными дробями.

Для представления функций непрерывными дробями используются степенные ряды для этих функций, преобразуемые на основе определенных правил в непрерывные дроби.

Кроме того, Эйлер и Лагранж дали методы разложения в непрерывные дроби функций, являющихся решениями некоторых дифференциальных уравнений³⁾.

И. М. Стесин предложил метод преобразования рядов по ортогональным системам многочленов (например, по многочленам Чебышева или Лежандра) в рациональные приближения соответственных функций⁴⁾.

¹⁾ А. А. Марков, Лекции о непрерывных дробях (Избранные сочинения, Гостехиздат, М.—Л., 1947).

²⁾ А. Н. Хованский, Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1956.

³⁾ См. упомянутую книгу А. Н. Хованского, а также Н. И. Симонова, Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений..., «Историко-математ. исследования», вып. 10, Гостехиздат, М., 1957.

⁴⁾ И. М. Стесин, Вычислительная математика, вып. 3, М., 1957.

Вывод формулы (24). Будем обозначать через \sum_n сумму $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$. Будем считать, далее, что для отрицательного целого числа n $\frac{1}{n!} = 0$. Тогда можно записать

$$e^z = \sum_n \frac{z^n}{n!}, \quad (1)$$

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^m \frac{m!}{n!(m-n)!} a^n b^{m-n} = \sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!} a^n b^{m-n}. \quad (2)$$

Из формулы (25) текста следует

$$I_n(a) = \sum_k \frac{1}{(n+k)! k!} \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k}. \quad (3)$$

Заменяя в (3) $n+k$ через l и, следовательно, $n+2k$ через $(-n+2l)$, k через $(-n+l)$, запишем (3) в виде

$$I_n(a) = \sum_l \frac{1}{l!(-n+l)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{-n+2l}. \quad (4)$$

Но, с другой стороны, так как в силу (3)

$$I_{-n}(a) = \sum_k \frac{1}{(-n+k)! k!} \left(\frac{a}{2}\right)^{-n+2k}, \quad (5)$$

то для целых n в силу (5) и (4) имеем

$$I_n(a) = I_{-n}(a); \quad (6)$$

поэтому доказываемая формула (24) запишется в виде

$$e^{a \cos t} = \sum_n I_n(a) \cos nt. \quad (7)$$

Для доказательства (7) воспользуемся формулами (1), (2) и равенством Эйлера

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} e^{a \cos t} &= \sum_m \frac{a^m \cos^m t}{m!} = \sum_m \frac{a^m}{2^m \cdot m!} (e^{it} + e^{-it})^m = \\ &= \sum_m \sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^m \frac{1}{k! (m-k)!} e^{(2k-m)it}. \end{aligned} \quad (9)$$

С другой стороны, меняя местами слагаемые e^{it} и e^{-it} в (8), получим

$$e^{a \cos t} = \sum_m \sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^m \frac{1}{k! (m-k)!} e^{-(2k-m)it}. \quad (10)$$

Беря средне-арифметическое правых частей в (9) и (10), приходим к равенству

$$e^{a \cos t} = \sum_m \sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^m \frac{1}{k! (m-k)!} \cos(2k-m)t. \quad (11)$$

Обозначая $n = m - 2k$, следовательно, $m - k = n + k$, $m = n + 2k$, получим из (11):

$$\begin{aligned} e^{a \cos t} &= \sum_n \sum_k \left(\frac{a}{2} \right)^{2k} \frac{1}{k! (n+k)!} \cos nt = \\ &= \sum_n \left[\sum_k \left(\frac{a}{2} \right)^{2k} \frac{1}{k! (n+k)!} \cos nt \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (3), получаем доказываемое равенство (7), т. е. (24).

Вывод формулы (44). Заметим сначала, что $t^{-n} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; отсюда получаем:

$$\left(t^{-n} e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \Big|_x^\infty = -x^n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Далее, $d(e^{-\frac{x^2}{2}}) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, т. е. $e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -x^{-1} d e^{-\frac{x^2}{2}}$. Поэтому получаем интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty t^{-n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= -x \int_x^\infty t^{-(n+1)} d e^{-\frac{t^2}{2}} = - \left(t^{-\frac{t^2}{2}} - t^{-(n+1)} e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \Big|_x^\infty + \\ &+ \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt t^{-(n+1)} = x^{-(n+1)} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{n+1} \int_x^\infty t^{-(n+2)} e^{-\frac{t^2}{2}} dx, \end{aligned} \quad (12)$$

отсюда

$$\int_x^\infty t^{-n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < x^{-(n+1)} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (13)$$

Далее, последовательно применяя формулу (12) при $n=0, 2, 4, \dots, 2k$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= x^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^\infty t^{-2} e^{-\frac{t^2}{2}} = x^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} - x^{-3} e^{-\frac{x^2}{2}} + 3 \int_x^\infty t^{-4} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} (x^{-1} - x^{-3} + 3x^{-5}) - 3 \cdot 5 \int_x^\infty t^{-6} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} (x^{-1} - x^{-3} + 3x^{-5} - 3 \cdot 5 x^{-7}) + 3 \cdot 5 \cdot 7 \int_x^\infty t^{-8} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \dots \\ &\dots = e^{-\frac{t^2}{2}} [x^{-1} - x^{-3} + 1 \cdot 3 x^{-5} - \dots + (-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) x^{-(2k+1)}] + \\ &+ (-1)^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) (2k+1) \int_x^\infty t^{-(2k+2)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \end{aligned}$$

Умножая левую и правую части на $e^{\frac{x^2}{2}}$, получаем:

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x^{-1} - x^{-3} + 1 \cdot 3x^{-5} - 1 \cdot 3 \cdot 5x^{-7} + \dots$$

$$\dots + (-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) x^{-(2k+1)} + R_k(x);$$

$$R_k(x) = (-1)^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) \int_x^\infty t^{2k+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Отсюда и из (13) при $n = 2k + 2$ получаем

$$|R_k(x)| = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty t^{2k+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt <$$

$$< 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) x^{2k+3} = |u_{k+1}(x)|.$$

Мы доказали формулу (44).



ОЧЕРК ОСНОВНЫХ ИДЕЙ ТОПОЛОГИИ

В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович

(Москва)

(Продолжение)

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ. КОМБИНАТОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ

7. Фундаментальная группа

В этой главе мы рассмотрим одно важное топологическое понятие, тесно связанное с алгебраическим понятием группы¹⁾. Мы покажем, что для каждой фигуры, точнее, для каждого топологического пространства²⁾ можно построить определенную группу — *фундаментальную группу* этого пространства. Несмотря на кажущуюся абстрактность этого понятия, оно имеет ряд конкретных применений, даже практического характера (например, к теории узлов, см. ниже).

Прежде чем дать определение фундаментальной группы, вернемся к понятию пути³⁾, рассмотренному в гл. 4.

Пути и их деформации. Гомотопные пути

Пусть точка x непрерывно перемещается в некотором связном⁴⁾ топологическом пространстве X , описывая путь h от начальной точки x_0 до конечной точки x_1 . Будем теперь этот путь *непрерывно деформировать*, перемещать в пространстве X , оставляя концевые точки x_0 и x_1 неподвижными (рис. 93). Мы придем тогда к некоторому другому пути h' ;

¹⁾ Основные определения, относящиеся к теории групп, помещены в конце статьи, в добавлении (стр. 51—52). См. также, например, в книге П. С. Александрова, Введение в теорию групп, М., 1951.

²⁾ См. гл. 4, «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 11 и 14.

³⁾ См. там же, стр. 20.

⁴⁾ В отличие от того, что было сказано в гл. 4, мы здесь и всюду в дальнейшем будем считать фигуру (или пространство) X связной, если любые ее две точки могут быть соединены путем. Фигуры, связанные в этом смысле (их называют, для отличия, *линейно связными*), связны и в том смысле, который придавался слову «связность» в гл. 4 (но не наоборот).

промежуточные положения деформируемого пути изображены на рис. 93 тонкими линиями.

Отметим, что в процессе деформации путь может пересекать сам себя, проходить по несколько раз через одни и те же точки пространства X и т. п. Например, на рис. 94 изображена деформация, в ре-

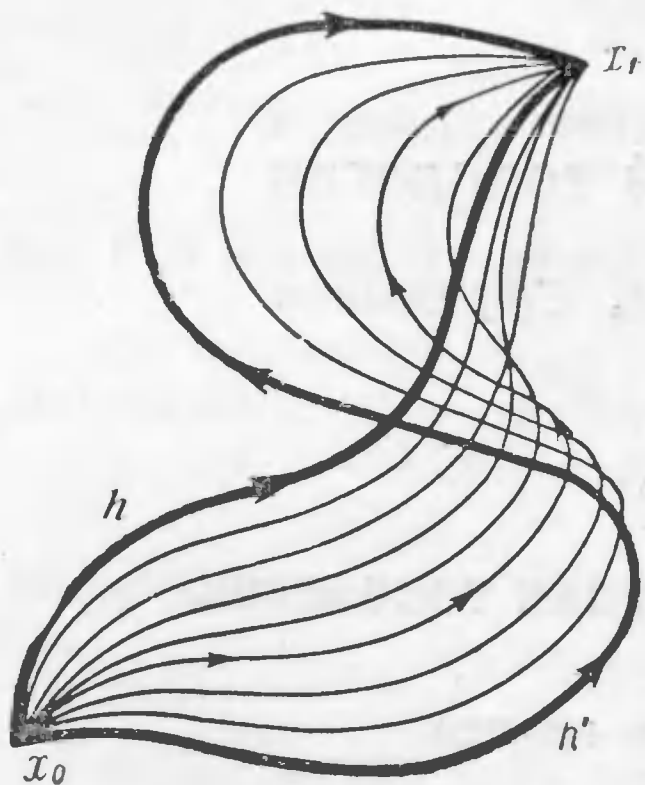


Рис. 93.

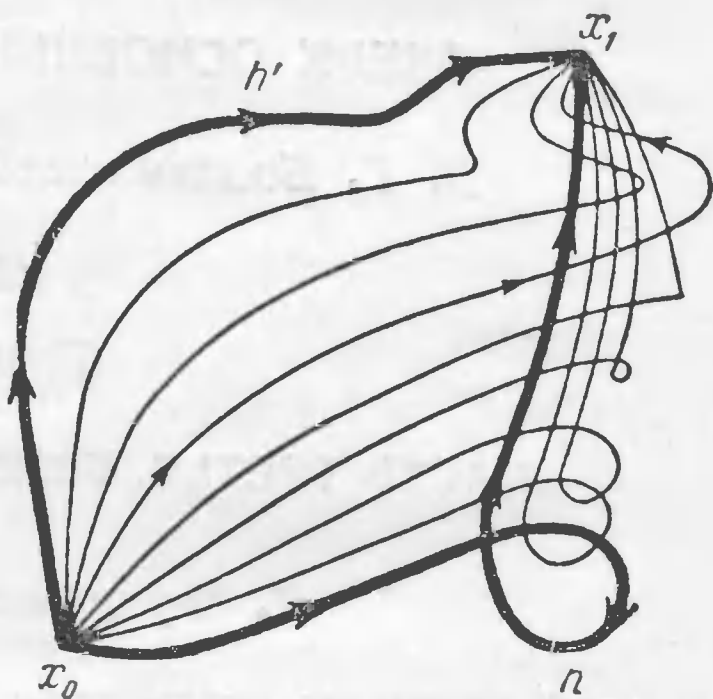


Рис. 94.

зультате которой путь h переходит в другой путь h' , который уже сам себя не пересекает.

Если пути h_1 и h_2 таковы, что один из них может быть при помощи деформации превращен в другой, то эти пути называются *гомотопными* между собой; обозначается это следующим образом:

$$h_1 \sim h_2.$$

Еще раз подчеркнем, что мы рассматриваем только такие деформации путей, при которых их концевые точки не смещаются.

Легко понять, что в круге любые два пути h_1 и h_2 , имеющие общие концы, гомотопны между собой.

Действительно, предположим, что путь представляет собой растянутую резиновую нить, извилистым образом расположенную внутри круга. Если мы отпустим резинку, закрепив концевые точки и позволив ей свободно перемещаться, сжимаясь, то нить начнет деформироваться и примет положение, в котором она наименее растянута, т. е. расположится по прямолинейному отрезку, соединяющему концевые точки x_0 и x_1 . Таким образом, любой путь, соединяющий точки x_0 и x_1 в круге, гомотопен отрезку x_0x_1 , а потому *любые два пути в круге гомотопны между собой*.

В кольце же не всякие два пути, имеющие общие концы, гомотопны между собой; например, пути h_1 и h_2 , изображенные на рис. 95, не могут быть превращены один в другой с помощью перемещения внутри кольца: мешает «дырка», имеющаяся в кольце.

Произведение путей. Гомотопические классы путей

Если путь k начинается в той же точке, в которой кончается другой путь h , то путь, получающийся, если сначала пройти h , а затем k , называется *произведением* путей h и k и обозначается через hk . Согласно этому определению, *перемножать можно только такие пути, для которых конец первого совпадает с началом второго*.

Заметим, что если $h \sim h'$, $k \sim k'$ и при этом начало пути k совпадает с концом пути h , то путь hk гомотопен пути $h'k'$.

Фиксируем теперь в пространстве X некоторую точку o и будем рассматривать только такие пути в X , которые начинаются и кончаются в точке o . Любые два из таких путей можно перемножить¹⁾.

Условимся, наконец, не различать между собой гомотопные пути. Иначе говоря, будем рассматривать не сами пути, а классы путей,

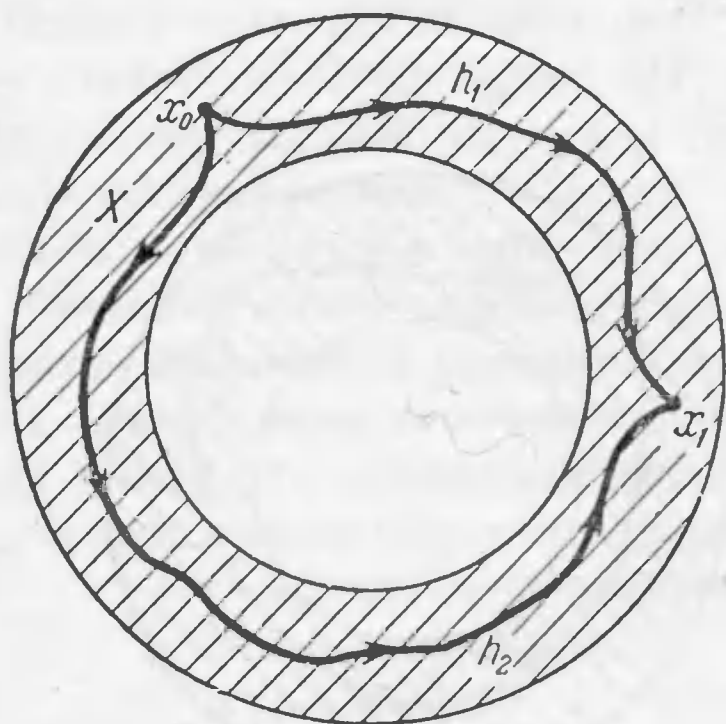


Рис. 95.

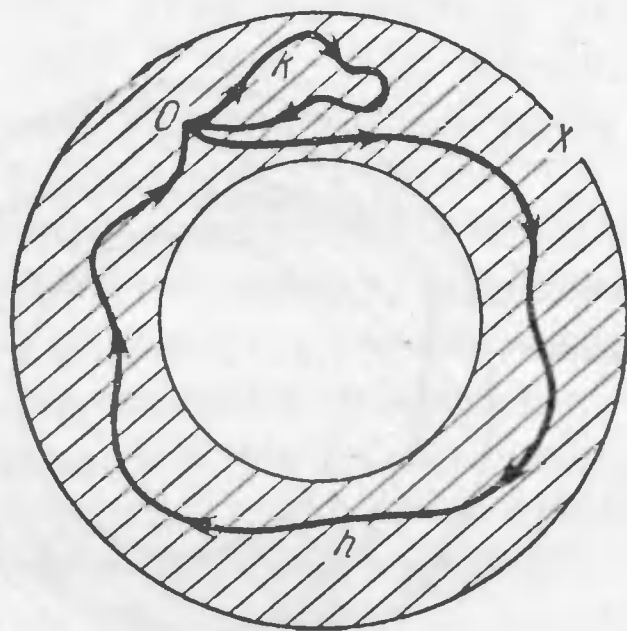


Рис. 96.

объединяя в один класс все гомотопные между собой пути. В некоторых случаях, например когда X — круг, существует только один-единственный гомотопический класс, т. е. все пути гомотопны между собой. Но в кольце, например (рис. 96), два пути h и k не гомотопны между собой: один из них (путь k) не обходит имеющейся в кольце дырки и может быть «стянут в одну точку», а другой (путь h) обходит дырку, и стянуть его в точку невозможно. Таким образом, пути h и k в кольце принадлежат разным классам.

Итак, в фигуре X , в которой выбрана некоторая фиксированная «базисная» точка o , рассматриваются различные гомотопические классы замкнутых путей, начинающихся и кончающихся в этой точке. Множество всех таких классов обозначим через $F(X)$. Эти классы можно *перемножать*: берем путь h , принадлежащий первому классу, путь k ,

¹⁾ Заметим, что hk и kh суть, вообще говоря, разные пути, и даже обычно не гомотопные между собой (мы увидим это на приводимых ниже примерах).

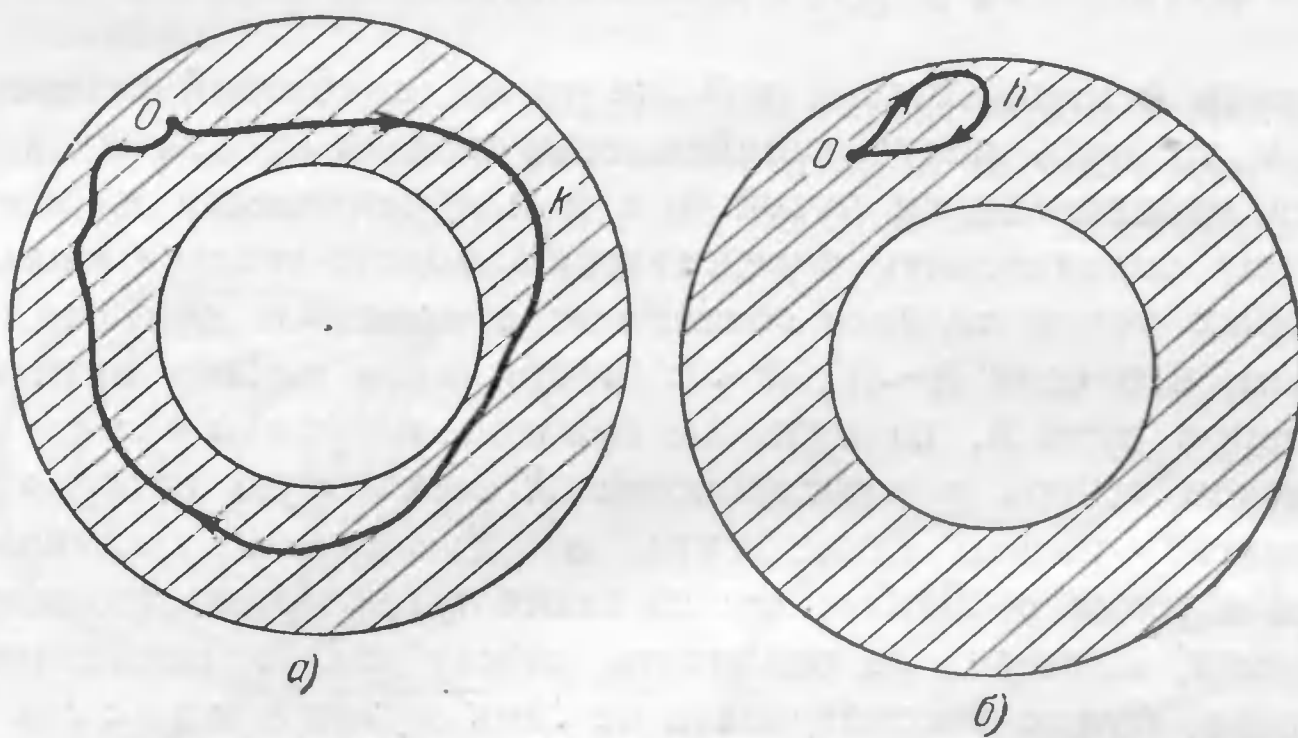


Рис. 97.

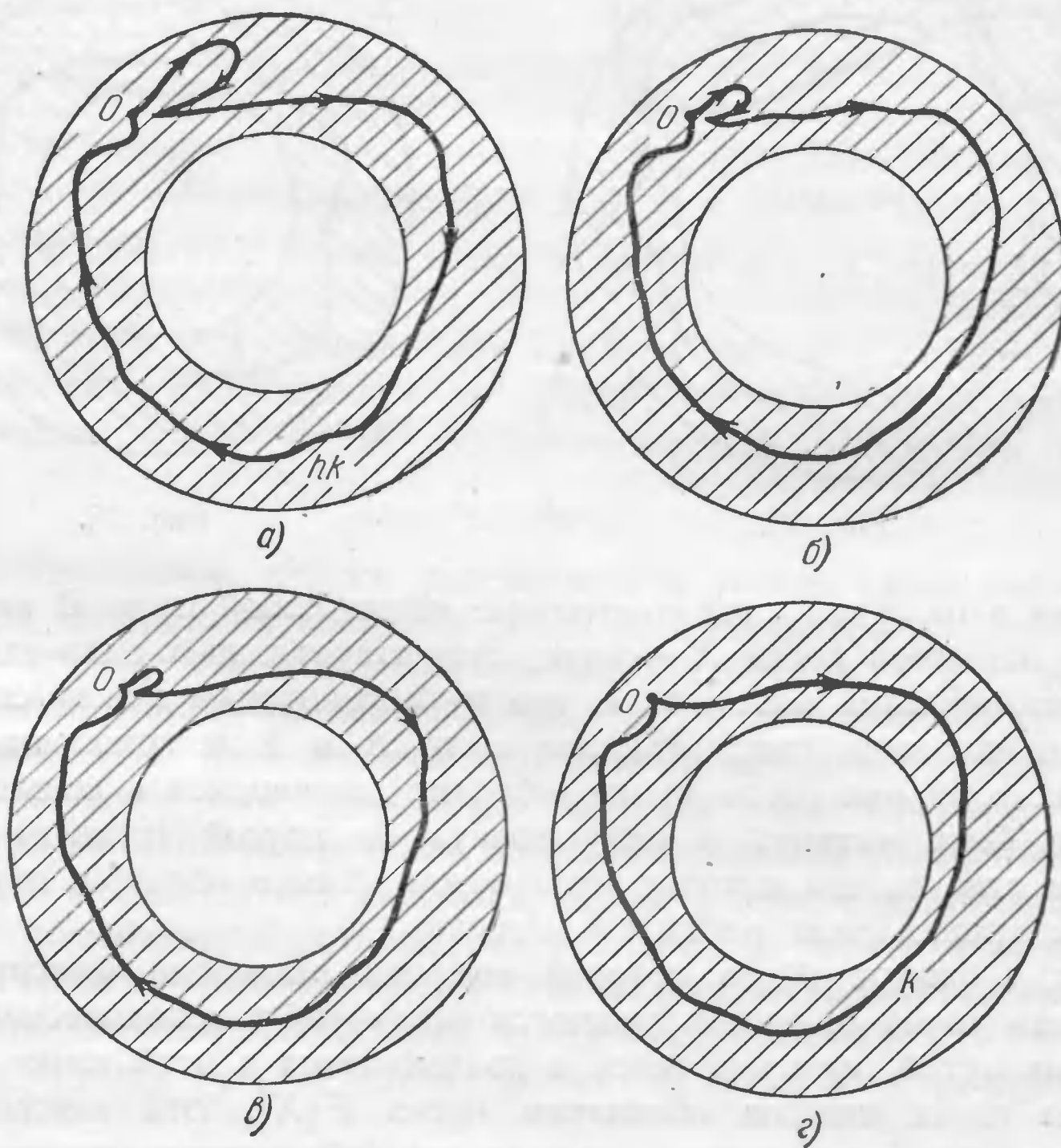


Рис. 98.

принадлежащий второму классу, и перемножаем их; тогда класс, который содержит путь hk , и называется *произведением* двух взятых классов. Если вместо h и k были взяты другие «представители» h' и k' рассматриваемых классов, то, согласно сказанному выше, путь $h'k'$ гомотопен hk , т. е. определяет тот же самый класс. Таким образом, произведение двух классов определяется именно этими классами, а от выбора «представителей» не зависит.

Фундаментальная группа

Мы видели, что во множестве $F(X)$, т. е. во множестве всех гомотопических классов путей пространства X (начинающихся и кончающихся в точке o), определено умножение. Оказывается, что *относительно такой операции умножения множество $F(X)$ является группой*. Укажем вкратце, каким образом это устанавливается.

Если k есть какой-либо путь, а h — другой путь, который может быть стянут в точку (рис. 97, a и b ; оба пути начинаются и кончаются в o), то, как нетрудно показать, $hk \sim k$ (рис. 98), $kh \sim k$. Поэтому, обозначив через e класс всех путей, стягиваемых в точку, мы получим $ae = ea = a$ для любого класса a .

Применяя терминологию теории групп, мы можем сказать, что класс e является *единицей*¹⁾ относительно умножения, введенного в множестве $F(X)$. Далее, если a — какой-либо класс, а h — путь, принадлежащий этому классу, то обозначим через h^{-1} путь, который получается, если путь h пробегать в обратном направлении (рис. 99). Нетрудно проверить,

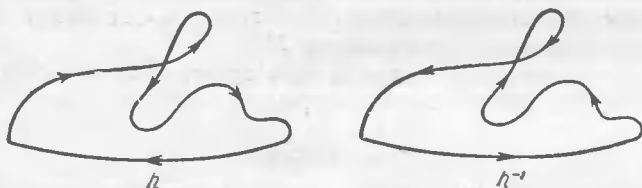


Рис. 99.

что пути hh^{-1} и $h^{-1}h$ стягиваемы в точку. Поэтому, обозначая через a^{-1} класс, которому принадлежит путь h^{-1} , мы найдем, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, т. е. в $F(X)$ для каждого элемента a существует обратный. Наконец, для любых трех путей h, k, l мы имеем $(hk)l \equiv h(kl)$, откуда следует, что умножение в $F(X)$ ассоциативно. Таким образом, множество $F(X)$ есть группа относительно введенного умножения. Она называется *фундаментальной группой пространства X* .

Заметим, что группа $F(X)$, вообще говоря, не коммутативна: может случиться, что в этой группе $ab \neq ba$.

¹⁾ В дальнейшем единицу группы $F(X)$ мы будем обозначать не символом e , а более привычным символом 1 .

Изменение базисной точки

Приведенное выше определение фундаментальной группы опиралось на произвольно выбранную начальную, *базисную* точку o .

Однако нетрудно доказать, что фундаментальные группы связной фигуры X , построенные при помощи различных точек o и o^* , изоморфны между собой. Действительно, пусть w — какой-либо путь,

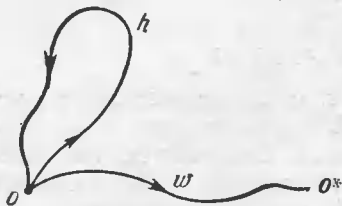


Рис. 100.

соединяющий точку o с o^* (рис. 100). Каждому замкнутому пути h с начальной точкой o поставим в соответствие путь h^* с начальной точкой o^* по следующему правилу: $h^* = w^{-1}hw$ (w^{-1} есть путь w , пробегаемый в обратном направлении). Нетрудно проверить, что это правило определяет взаимно однозначное соответствие между классами путей в точке o и в точке o^* . Ясно также, что это соответствие является изоморфизмом:

из соотношений $h^* = w^{-1}hw$, $k^* = w^{-1}kw$ следует, что путь $h^*k^* = w^{-1}hw w^{-1}kw$ гомотопен пути $w^{-1}hkw$, т. е. класс, определяемый путем h^*k^* , соответствует классу, определяемому путем hk . Это и означает, что *фундаментальные группы, построенные при помощи различных базисных точек, изоморфны между собой*.

Можно доказать и более общее утверждение: *если связные фигуры X и X' гомеоморфны, то их фундаментальные группы $F(X)$ и $F(X')$ изоморфны*. Таким образом, фундаментальная группа по своему алгебраическому строению является топологическим инвариантом рассматриваемого пространства X .

Если фундаментальные группы двух пространств не изоморфны, то сами эти пространства не гомеоморфны.

Примеры

Несколько ниже мы укажем способ нахождения фундаментальной группы для довольно широкого класса фигур (так называемых полиэдров), а сейчас рассмотрим несколько примеров непосредственного нахождения фундаментальной группы.

1. Фундаментальная группа круга, как мы видели, тривиальна, т. е. *состоит только из единичного элемента*.

Дальнейшие примеры мы сможем легко разобрать, если примем во внимание, что на «гладкой» поверхности любой путь (даже путь, который, подобно кривой Пеано, заполняет всю эту поверхность) может быть деформирован в «гладкий путь», не покрывающий всей поверхности.

2. Фундаментальная группа двумерной сферы (поверхности шара трехмерного пространства) также тривиальна. Действительно, любой путь на сфере может быть деформирован в «гладкий» путь, не заполняющий всей сферы. Если выколоть (удалить) теперь из сферы

одну из точек, через которые этот путь не проходит, то мы получим поверхность, гомеоморфную внутренности круга, а на круге, как мы знаем, любой путь можно стянуть в точку.

Пространства, имеющие тривиальную фундаментальную группу, называются *односвязными*. Таким образом, как круг, так и сфера односвязны. Другими примерами односвязных пространств могут служить: прямая, плоскость и др.; односвязной является и n -мерная сфера. Если вспомнить определение фундаментальной группы, то можно дать следующее непосредственное определение односвязности: *пространство называется односвязным, если любой замкнутый путь в нем может быть стянут в точку*.

3. Фундаментальная группа окружности уже не тривиальна — она изоморфна группе всех целых чисел по отношению к их сложению (такую группу называют *бесконечной циклической группой*)¹⁾.

В самом деле, обозначим путь, один раз обходящий окружность в некотором направлении (которое условимся считать «положительным»), через a , а обратный путь — через a^{-1} . Тогда a^n будет обозначать путь, n раз обходящий окружность, причем в «положительном» направлении, если n положительно, и в «отрицательном», если n отрицательно (a^0 означает «нулевой путь», т. е. путь на окружности, который может быть стянут в «базисную» точку o).

Для более отчетливого рассмотрения различных путей на окружности, изобразим соответствующие движения точки графически. Каждому пути можно поставить в соответствие некоторый график: по определению пути²⁾, каждое положение перемещающейся точки соответствует значению параметра t (например, времени) на единичном отрезке $I(0 \leq t \leq 1)$. С другой стороны, этому же положению точки соответствует определенное значение φ ее угловой координаты на окружности (при этом удобно считать, что в начальной точке o угловая координата φ равна нулю). Откладывая по оси абсцисс значение t , а по оси ординат угол φ , получим график зависимости $\varphi = \varphi(t)$ [причем $\varphi(0) = 0$].

Если точка, движущаяся равномерно, обходит окружность n раз, мы получаем путь a^n ; его график представляет собой прямой линейный отрезок (см. рис. 101), соединяющий точки $(0, 0)$ и $(1, 2n\pi)$. Однако точка может весьма сложным образом двигаться по окружности, например, многократно изменяя направление своего движения. На рис. 102, б показан график пути, схематически изображенного на рис. 102, а. Но каким бы ни был замкнутый путь на окружности, его график всегда соединяет точку $(0, 0)$ с точкой $(1, 2n\pi)$, где n — некоторое положительное число: ведь, пройдя этот путь, мы возвращаемся в точку o , угловая координата которой является числом,

¹⁾ Такую группу называют также *свободной*, так как она не содержит никаких определяющих соотношений (см. стр. 52).

²⁾ «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 21.

кратным 2π . Если график некоторого пути соединяет точки $(0, 0)$ и $(1, 2n\pi)$, то число n называется *числом обходов* рассматриваемого пути

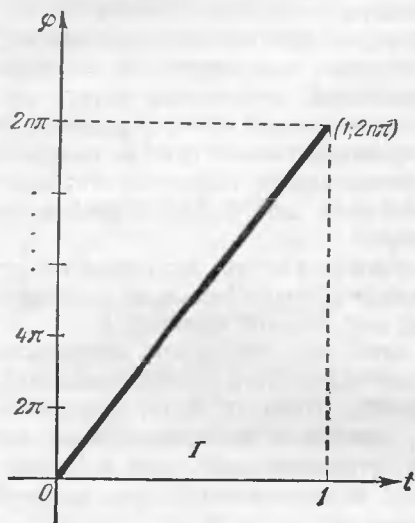


Рис. 101.

по окружности. Нетрудно видеть, что любой путь f , совершающий n обходов, гомотопен пути a^n : для этого, начертив на одном рисунке графики пути f и пути a^n , заставим каждую точку первого графика перемещаться вертикально (т. е. параллельно оси ординат) до графика пути a^n . Если такое перемещение производить одновременно для всех точек, лежащих на графике пути f (рис. 103), то мы деформируем этот график в отрезок, являющийся графиком пути a^n . Но если график пути деформируется, то и сам этот путь деформируется, откуда и следует, что пути f и a^n гомотопны между собой. Значит, все пути, совершающие n обходов по окружности, гомотопны пути a^n , т. е. все гомотопны

между собой и принадлежат одному «классу путей». Пути же, для которых число обходов различно, не гомотопны между собой.

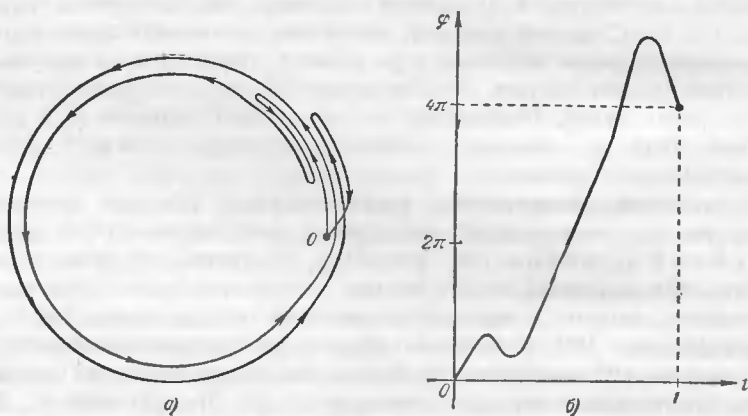


Рис. 102.

Итак, элементы фундаментальной группы окружности находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми числами. Остается заметить, что, при перемножении путей их, числа обходов, очевидно,

складываются, и потому *фундаментальная группа окружности изоморфна группе целых чисел*.

4. Обратимся к фундаментальной группе проективной плоскости. Для этого примем какую-либо точку o за начальную и некоторую проходящую через o прямую, на которой выбрано направление, обозначим через a . Мы рассматриваем прямую a как замкнутый путь, выходящий из точки o , идущий до бесконечно удаленной точки по лучу, указывающему направление, и возвращающийся в точку o по другому лучу той же прямой. Поворот прямой a вокруг точки o на 180° представляет собой непрерывную деформацию, переводящую a в a^{-1} . Поэтому, обозначив через α элемент фундаментальной группы, определяемый путем a , мы имеем $\alpha = \alpha^{-1}$, т. е. $\alpha^2 = 1$. Нетрудно показать, что любой замкнутый путь в точке o может быть на проективной плоскости «спроектирован» на прямую a , т. е. гомотопен пути a^n .

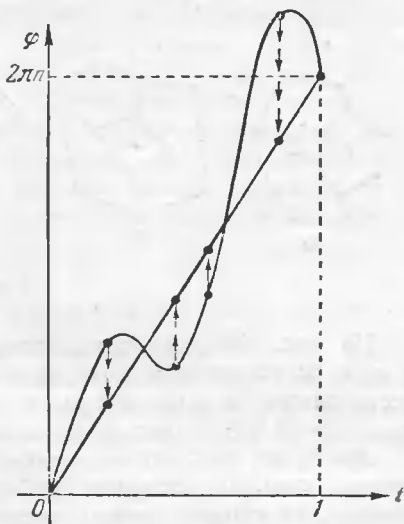


Рис. 103.

Но так как путь a^2 может быть стянут в точку (ибо $\alpha^2 = 1$), то любой путь либо гомотопен пути a , либо стягивается в точку. Можно показать, что путь a не стягивается в точку. Таким образом, *фундаментальная группа проективной плоскости состоит всего из двух элементов 1 и α , где $\alpha^2 = 1$, т. е. является циклической группой второго порядка*.

Клеточные разбиения и полиэдры

Вычисление фундаментальной группы для любых топологических пространств является настолько сложной задачей, что вряд ли здесь можно дать какие-либо конкретные «рецепты» для ее решения. Мы ограничимся рассмотрением более простых фигур — *полиэдров*, которые играют в топологии (особенно в комбинаторной топологии) важную роль и по существу являются основными объектами изучения. Прежде всего укажем, какие фигуры называются полиэдрами.

В главе 3 мы часто рассматривали граф¹⁾, «нарисованный» на некоторой поверхности таким образом, что если разрезать поверхность по всем ребрам этого графа, то она распадется на отдельные

¹⁾ «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 14.

куски, «границы», каждая из которых гомеоморфна кругу. Простейшим примером является разбиение выпуклого многогранника с помощью его ребер. Однако может быть и более сложное расположение границ относительно друг друга, как, например, на рис. 104, а, б и в.

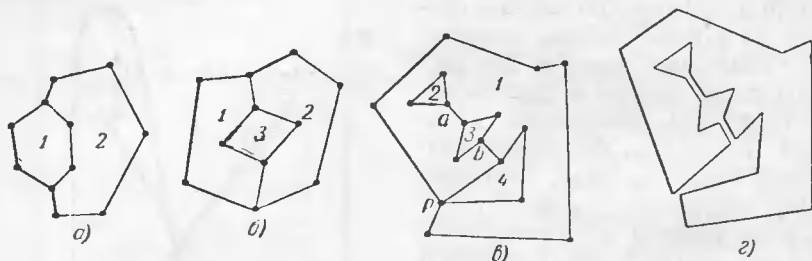


Рис. 104.

На рис. 104, в грань, помеченная цифрой 1, примыкает сама к себе по ребрам a и b , а также в вершине p ; однако если произвести разрез по всем ребрам, то эта грань превратится в кусок, гомеоморфный кругу (рис. 104, з).

Мы будем рассматривать также и более общие фигуры (не только поверхности), допускающие разбиение на многоугольники, т. е. такие фигуры, на которых можно «нарисовать» граф, после «разрезания» по которому фигура распадется на отдельные куски, гомеоморфные кругу. Эти куски мы будем называть *гранями*, а элементы графа —

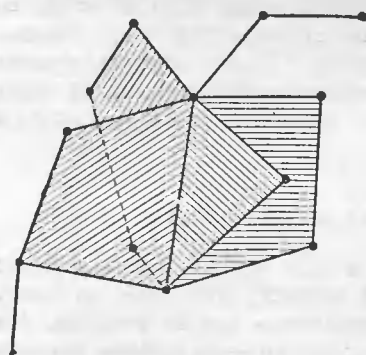


Рис. 105.

ребрами и вершинами. При этом грани могут примыкать друг к другу довольно сложным образом (как, например, на рис. 104, а, б и в); допускается также, чтобы к некоторому ребру примыкали три, четыре и т. д. грани (а не обязательно две или одна, как было в случае поверхности с краем); могут встречаться также и такие ребра, к которым не примыкает ни одна грань (рис. 105) — по таким ребрам «разрезать» фигуру не придется.

Всякую фигуру, которая с помощью некоторого графа может быть разрезана на куски, гомеоморфные кругу, мы будем называть *двумерным полиэдром*, а совокупность всех ребер, вершин и граней, на которые он разбит с помощью некоторого графа, будем называть *клеточным разбиением* (или просто *разбиением*) этого полиэдра. Конечно, существуют различные разбиения одного и того же полиэдра. Можно рассматривать также *одномерные полиэдры* (не содержащие граней);

каждое разбиение одномерного полиэдра представляет собой граф, ибо состоит из вершин и ребер. Можно рассматривать и *нульмерные полиэдры* (состоящие из отдельных точек). Наконец, бывают полиэдры трехмерные, четырехмерные, ..., n -мерные. Разбиение трехмерного полиэдра состоит из вершин, ребер, граней и тел (причем, если «разрезать» полиэдр по всем вершинам, ребрам и граням, то он распадется на отдельные трехмерные куски — *тела*, — гомеоморфные шару).

Элементы каждого разбиения (т. е. вершины, ребра, грани, ...) называются также *клетками* (а именно нульмерными клетками, одномерными, двумерными, ...). Полиэдры — это наиболее простые фигуры. Как мы знаем, в топологии рассматриваются также и более сложные фигуры, не являющиеся полиэдрами (большинство фигур, описанных в гл. 5)¹⁾.

Гомотопическая граница грани

Некоторое ребро клеточного разбиения мы будем называть *ориентированным*, если на нем задано (скажем, стрелкой) направление. Вместо стрелки можно условиться ставить знаки « $+$ » и « $-$ »: плюс в конце стрелки, минус — в начале (рис. 6, а). Если ребро

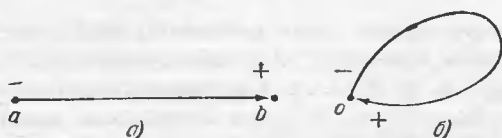


Рис. 106.

замкнуто (т. е. если его концы совпадают), то знак « $-$ » ставится у той части ребра, по которой мы начинаем движение в направлении стрелки, а знак « $+$ » у той части, на которой это движение заканчивается (рис. 106, б).

Нам понадобится, далее, говорить о направлении обхода на контуре некоторой грани. Смысл слов «направление обхода контура грани» в случае, когда грань является, например, выпуклым многоугольником, очевиден. В случаях же более сложных (см., например, рис. 104, в на стр. 36) направление обхода определяется следующим образом. Мы знаем, что при разрезании по всем ребрам каждая грань превращается в кусок, гомеоморфный кругу (рис. 104, г). Обойдем один раз границу этого куска в некотором направлении. При обратном «склеивании» рассмотренного куска в грань этот обход по границе куска даст некоторое движение по границе клетки. Это и есть *обход по контуру грани*. При движении по границе куска в обратном направлении обход по контуру грани заменяется на противоположный.

¹⁾ «Математическое просвещение», вып. 3.

Можно поступить для определения обхода и иначе: обходить контур грани не по самой его границе, а «очень близко» к границе, нигде ее не пересекая (ср. рис. 107, а, б).

Введем теперь понятие *гомотопической границы грани*, играющее важную роль при вычислении фундаментальных групп полиэдров.

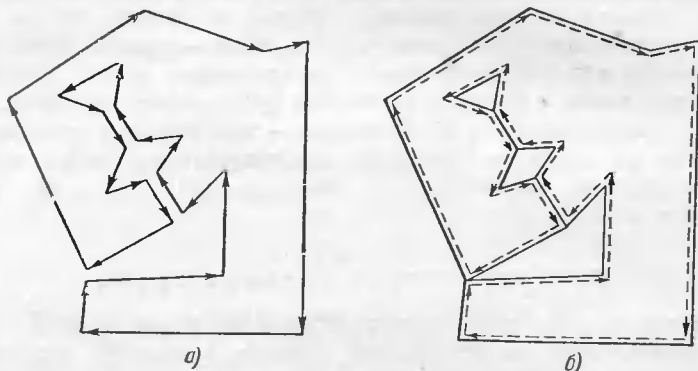


Рис. 107.

Рассмотрим некоторую грань клеточного разбиения; все ребра, к которым эта грань примыкает, как-либо ориентируем и обозначим (например, буквами a, b, c, \dots). Совершим теперь обход по контуру грани и одновременно с этим будем выписывать некоторое алгебраическое выражение (одночлен) следующим способом. Если мы, начиная

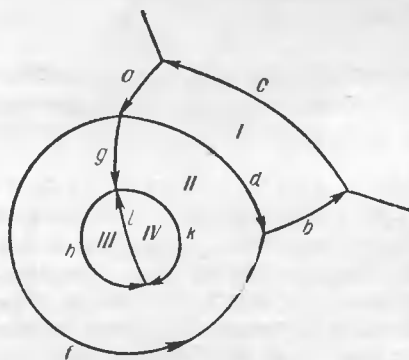


Рис. 108.

обход, движемся сначала по ребру a , то мы напишем прежде всего выражение a или a^{-1} , смотря по тому, проходим мы (совершая обход) ребро a по направлению имеющейся на этом ребре стрелки или против стрелки. Если следующее ребро, которое мы проходим, обозначено, скажем, буквой d , то мы справа припишем d или d^{-1} , смотря по тому, в каком направлении мы пробегаем ребро d . Если вслед затем мы проходим ребро m , то мы к получившемуся выражению припишем справа m или m^{-1} и т. д. Совершив весь обход, мы выпишем

некоторый одночлен, который и называется *гомотопической границей* рассматриваемой грани.

Заметим, что если все ребра определенным образом ориентированы и обозначены, то гомотопическую границу грани можно записать

поразному, в зависимости от того, в каком направлении обходить контур грани и с какого из ребер начинать обход. Мы будем для каждой грани брать какую-либо одну запись гомотопической границы (безразлично, какую именно). При этом переставлять сомножители в полученном одночлене запрещается.

В качестве примера обойдем против часовой стрелки контуры клеток *I*, *II*, *III*, *IV*, изображенных на рис. 108. Мы получим следующие гомотопические границы этих клеток:

$$I: adbc, II: kh^{-1}g^{-1}fd^{-1}g, III: hl, IV: l^{-1}k^{-1}.$$

Отметим, что, вообще говоря, одно и то же ребро может в гомотопическую границу некоторой грани входить более чем один раз (как, например, ребро *g* в гомотопической границе грани *II*).

Дерево; максимальное дерево графа

Введем следующее понятие. Некоторый связный граф называется *деревом* (рис. 109), если от одной его вершины к любой другой его вершине можно пройти в этом графе только по одной ломаной (составленной из ребер графа), или, что то же самое, если рассматриваемый граф не содержит ни одной замкнутой ломаной.

Во всяком связном графе можно выбрать (вообще говоря, разными

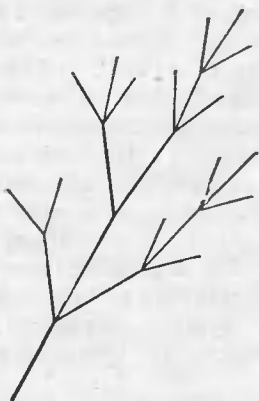


Рис. 109.

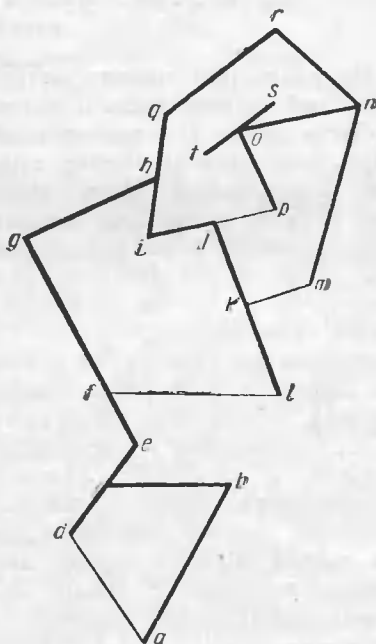


Рис. 110.

способами) *максимальное дерево*, т. е. такое дерево (составленное из вершин и ребер графа), что при добавлении к нему еще одного

(любого) ребра рассматриваемого графа оно уже перестает быть деревом. Для построения максимального дерева нужно взять любую вершину графа n , исходя из нее, добавлять одно за другим (пока это возможно) всё новые ребра графа, следя за тем, чтобы каждый раз получалось дерево. (Заметим, что максимальное дерево обязательно содержит все вершины рассматриваемого графа.)

Возьмем, например, граф, изображенный на рис. 110. Будем двигаться по нему, начиная с его вершины a в направлении b и дальше. Пройдя путь abc , мы попадаем в точку разветвления c , откуда можно идти по двум направлениям — к d и к e . Первое направление закончится в d , так как отрезок da замкнет путь $abcd$, и граф перестанет быть деревом. Второе направление пойдет по пути cef , а оттуда тоже можно двигаться по одному из двух направлений и т. д. В точке o , куда мы придем из n , можно идти по трем направлениям — op , os , ot . В результате мы и получаем максимальное дерево графа, изображенного на рис. 110; это дерево начерчено жирными линиями — в него не включаются отрезки da , fl , jp , mk .

Вычисление фундаментальной группы полиэдра

Мы дадим (без доказательства) простой способ вычисления фундаментальной группы связного полиэдра¹⁾.

Пусть теперь P — произвольный связный полиэдр. Возьмем какое-нибудь клеточное разбиение этого полиэдра и обозначим через G граф, образованный всеми вершинами и ребрами этого разбиения. В графе G выберем какое-нибудь максимальное дерево и все ребра, входящие в это дерево, пометим цифрой 1. Все остальные ребра графа G (не входящие в максимальное дерево) мы как-либо ориентируем и пометим различными буквами a, b, c, \dots . Далее, для каждой грани рассматриваемого клеточного разбиения мы выпишем ее гомотопическую границу, не обращая внимания на сомножители, равные единице (т. е. на ребра, помеченные цифрой 1). Наконец, построим группу, приняв за ее образующие элементы — элементы a, b, c, \dots , надписанные на не вошедших в максимальное дерево ребрах графа G , а за определяющие соотношения между этими образующими — равенства, получающиеся, если все выписанные гомотопические границы приравнять единице. Оказывается, что *построенная таким образом группа изоморфна фундаментальной группе взятого полиэдра P* . Такой способ вычисления фундаментальной группы является очень удобным.

¹⁾ Вычислить группу — это значит указать все ее образующие элементы и определяющие соотношения между ними (см. стр. 52). С этими понятиями можно ознакомиться также, например, по книге П. С. Александрова (см. примечание на стр. 27). [См. также заметку на стр. 32 и 106 1-го выпуска «Математического просвещения». *Прим. ред.*]

Примеры

1. Окружность можно представить в виде разбиения, состоящего из одного ребра и одной вершины (см. рис. 111). Максимальное дерево состоит из одной вершины. Поэтому ребро является единственным образующим элементом фундаментальной группы, а никаких определяющих соотношений нет (либо нет двумерных клеток). Таким образом, фундаментальная группа окружности является свободной циклической группой (ср. стр. 52).

2. Лемниската (рис. 112) имеет в качестве фундаментальной группы свободную группу (т. е. группу без определяющих соотношений) с двумя образующими a , b .

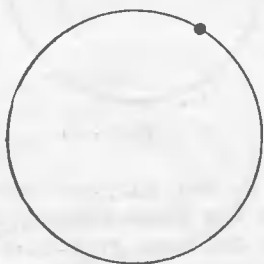


Рис. 111.



Рис. 112.

3. Сферу S (двумерную) можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего из одной вершины (нульмерной клетки) и еще одной (двумерной) клетки, так как если в сфере «выколоть» точку, то оставшаяся часть сферы будет гомеоморфна кругу (рассматриваемому без границы). Максимальное дерево состоит из одной вершины. Так как ребер нет, то фундаментальная группа сферы не содержит ни одной образующей, т. е. тривиальна (ср. стр. 32).

4. Рассмотрим изображенное на рис. 113 разбиение, состоящее из круга и его границы, разбитой на две полуокружности r_1 , r_2 . Склеивание диаметрально противоположных точек окружности превращает круг в проективную плоскость¹⁾, причем оба ребра r_1 , r_2 склеиваются (в согласии с имеющимися на них стрелками) в одно ребро r . Таким образом, проективная плоскость представляется в виде клеточного разбиения, содержащего одну вершину, одно ребро r и одну грань. Гомотопическая граница этой грани, как легко видеть на рис. 113, равна $r \cdot r$, т. е. равна r^2 . Итак, фундаментальная группа проективной плоскости определяется одной образующей r с соотношением $r^2 = 1$, т. е. является циклической группой второго порядка (или, иначе, группой вычетов по модулю 2, ср. стр. 35).

¹⁾ См. «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 32.

5. Рассмотрим *проективную плоскость по модулю m* , получающуюся, если на окружности некоторого круга склеивать между собой каждые m точек, делящих окружность на m равных дуг¹⁾. Для того чтобы получить разбиение проективной плоскости по модулю m на клетки, разобьем окружность на m равных дуг r_1, r_2, \dots, r_m , на которых отметим стрелками одинаковое направление (рис. 114). При

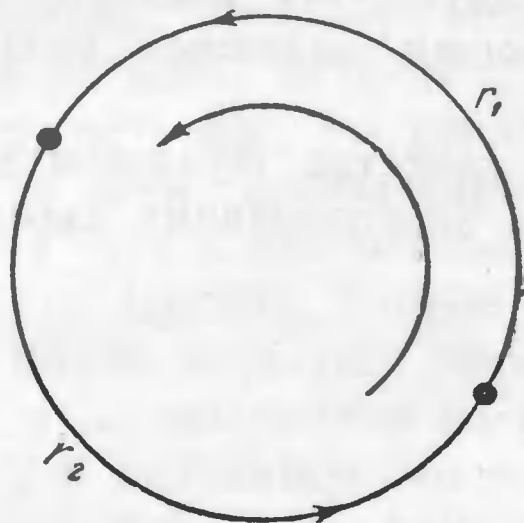


Рис. 113.

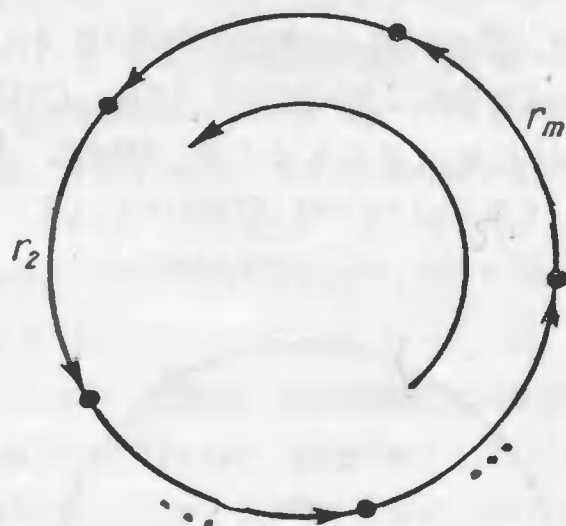


Рис. 114.

склеивании эти дуги дадут одно ребро r . Мы получаем клеточное разбиение с одной вершиной, одним ребром r и одной гранью, причем гомотопическая граница этой грани имеет значение $r \cdot r \cdot \dots \cdot r = r^m$. Следовательно, фундаментальная группа проективной плоскости по модулю m определяется одной образующей r с соотношением $r^m = 1$, т. е. является *циклической группой порядка m* (группой вычетов по модулю m).

6. Начертим на торе параллель a и меридиан b , пересекающиеся в точке o (рис. 115). Мы получаем, таким образом, клеточное разбиение тора, состоящее из одной вершины o , двух ребер a, b и одной

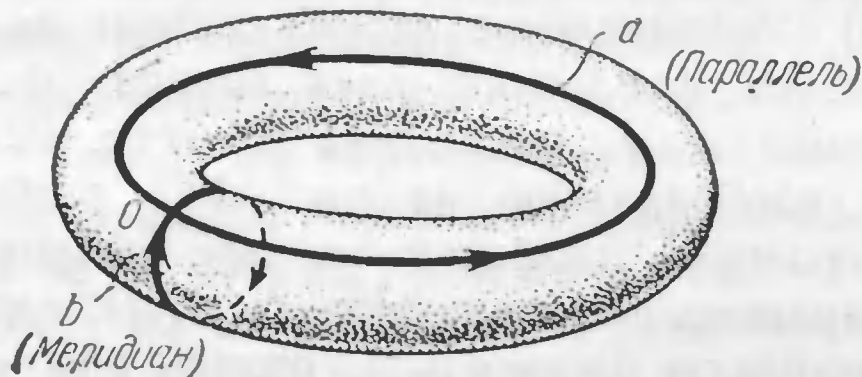


Рис. 115.

грани. Действительно, разрез по меридиану и параллели превращает тор в квадрат (рис. 116, $a - d$), т. е. в кусок, гомеоморфный кругу. Гомотопическая граница этой единственной грани в рассматриваемом клеточном разбиении равна $aba^{-1}b^{-1}$ (см. рис. 116, d). Таким образом,

¹⁾ Иначе говоря, проективная плоскость по модулю m получается, если дыру, вырезанную в сфере, заклеить «листом Мёбиуса по модулю m » (см. «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 33).

фундаментальная группа тора имеет две образующие a, b , связанные единственным соотношением $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т. е. соотношением $ab = ba$. Иначе говоря, эта фундаментальная группа является свободной абелевой группой с двумя образующими.

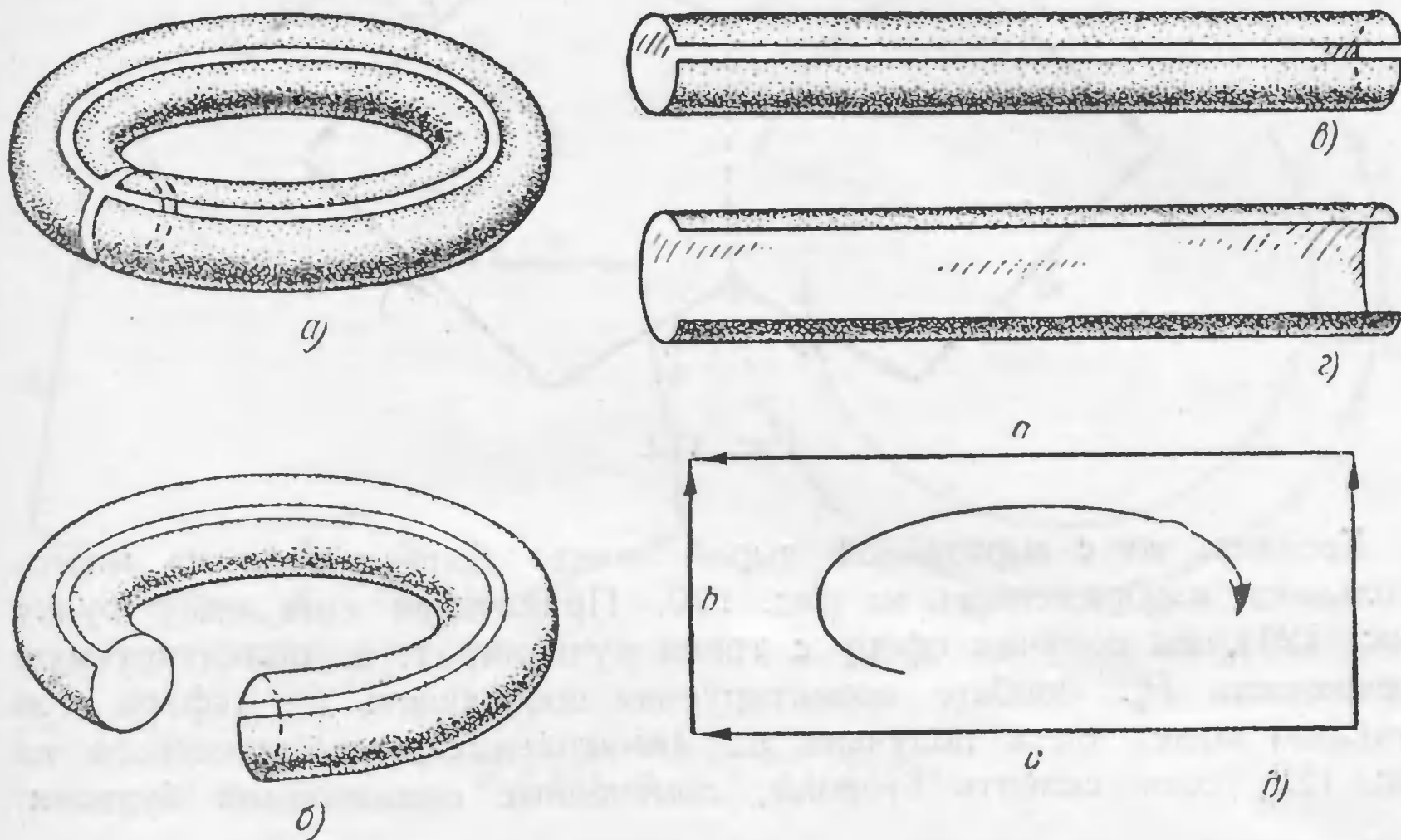


Рис. 116.

7. Если на торе мы вырежем дыру так, как указано на рис. 117, то при разрезании по меридиану и параллели мы получим не квадрат, а пятиугольник (рис. 118, ср. с рис. 116, д). Таким образом, склеи-

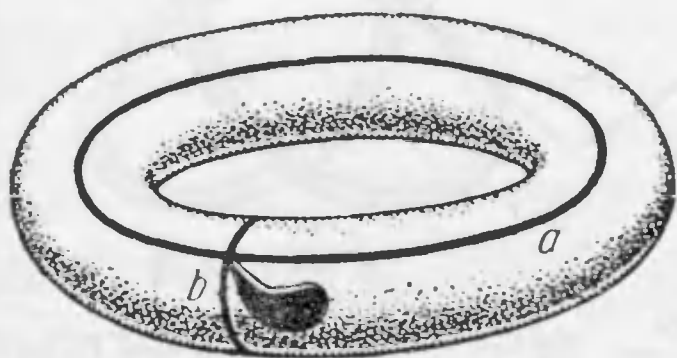


Рис. 117.

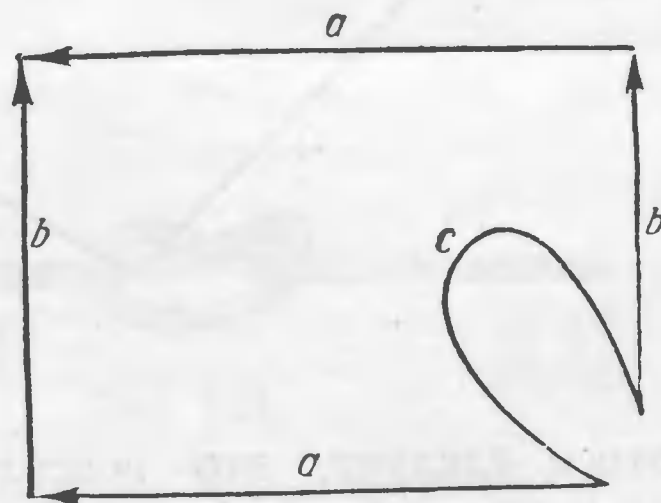


Рис. 118.

вание отрезков, помеченных на рис. 118 одинаковыми буквами, превращает пятиугольник в тор с дыркой, т. е. в ручку¹⁾. Ребро c дает край этой ручки. Склеивание двух таких ручек их краями (рис. 119) дает поверхность «кренделя»²⁾. Иначе говоря, если склеить

¹⁾ См. «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 21.

²⁾ См. там же, стр. 22, рис. 25.

отрезки, помеченные на рис. 119 одинаковыми буквами, то мы получим «крендель», т. е. ориентируемую поверхность P_2 .

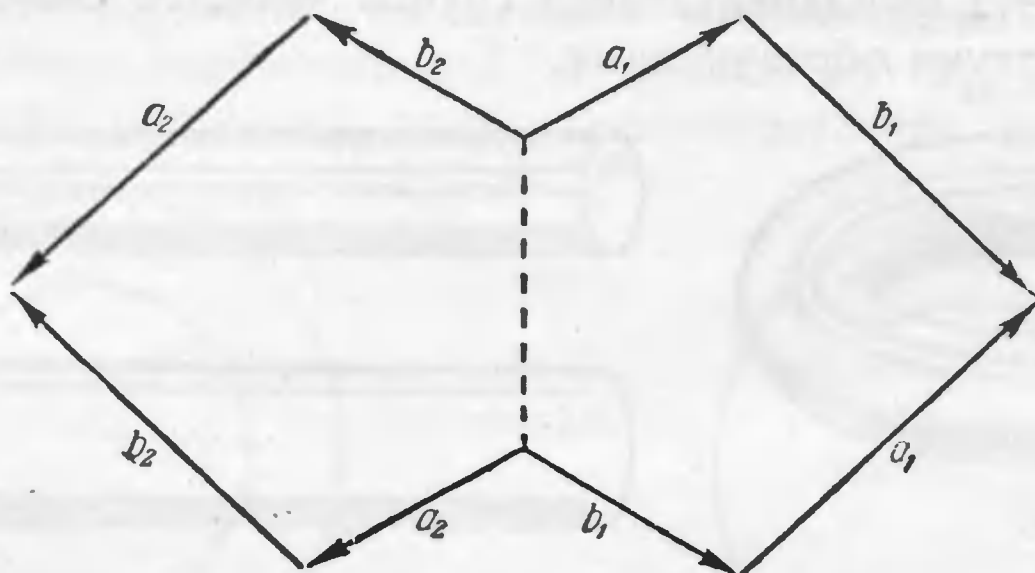


Рис. 119.

Крендель же с вырезанной дырой может быть склеен из многоугольника, изображенного на рис. 120. Приклеивая еще одну ручку (рис. 121), мы получим сферу с тремя ручками, т. е. ориентируемую поверхность P_3 . Вообще ориентируемая поверхность P_m (сфера с m ручками) может быть получена из $4m$ -угольника, изображенного на рис. 122, если склеить стороны, помеченные одинаковыми буквами.

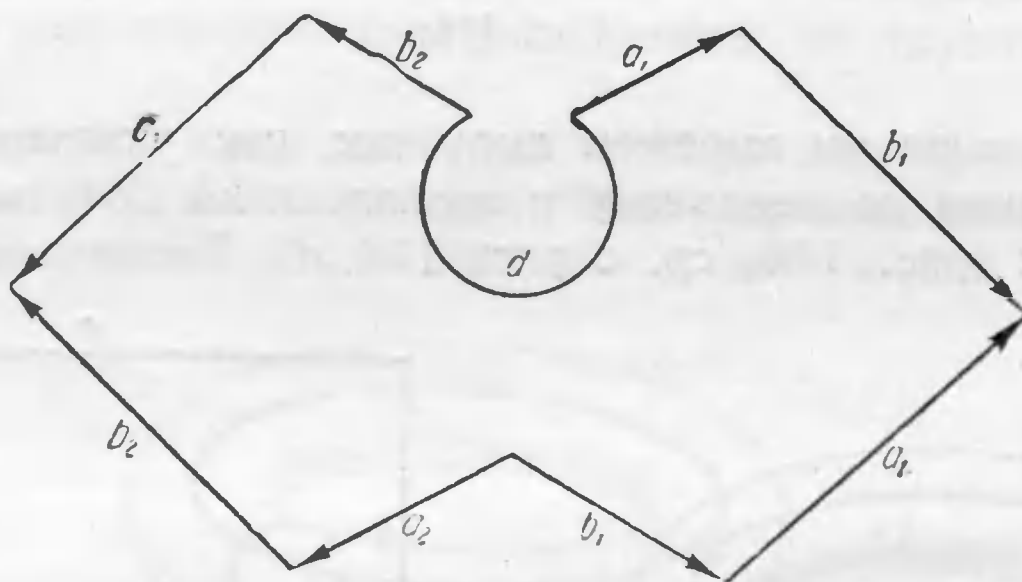


Рис. 120.

Из этого следует, что поверхность P_m может быть представлена в виде клеточного разбиения с одной вершиной, $2m$ ребрами $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m$ и одной гранью. Гомотопическая граница этой грани равна

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1}$$

(см. рис. 120). Таким образом, фундаментальная группа поверхности P_m имеет $2m$ образующих $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m$, связанных единственным соотношением:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} = 1.$$

Отметим, что при $m \geq 2$ эта группа не является абелевой (например, $a_1 b_1 \neq b_1 a_1$).

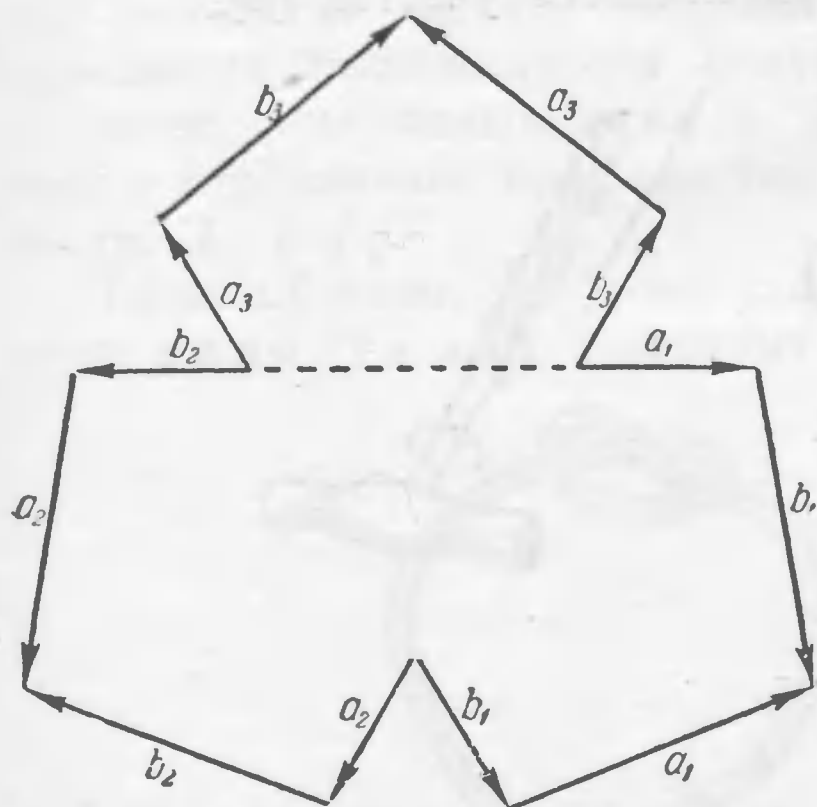


Рис. 121.

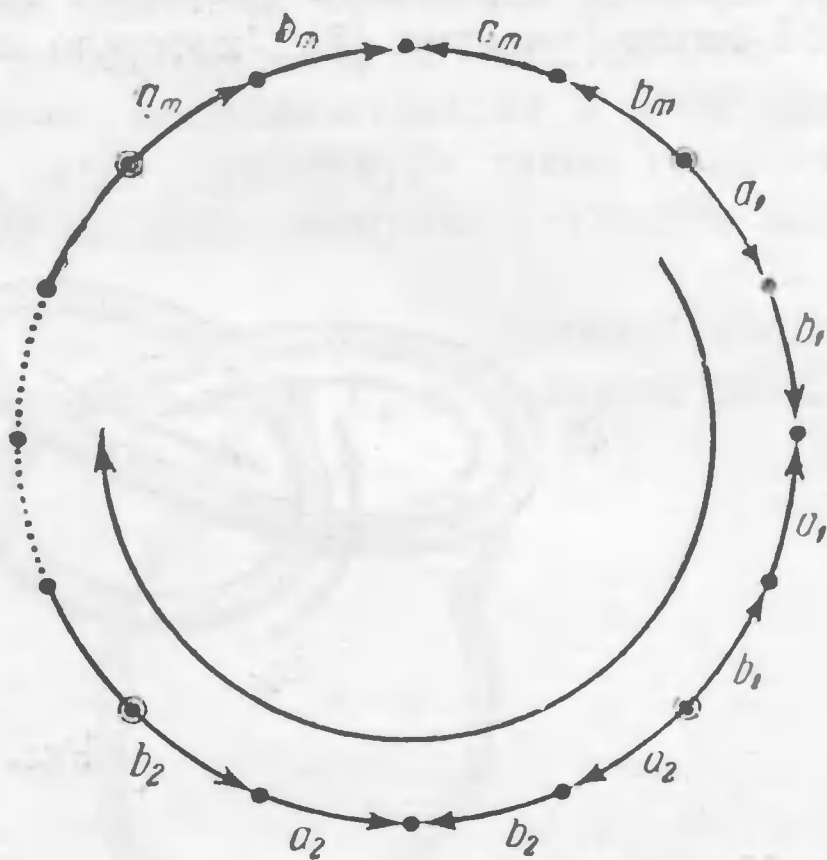


Рис. 122.

Узлы и их группы

Разнообразные узлы имеют многочисленные приложения. Узлы, применяемые для различных целей одними только альпинистами, насчитывают несколько десятков топологических видов. То же относится к узлам, применяемым моряками, ткачами, трикотажниками и т. п.

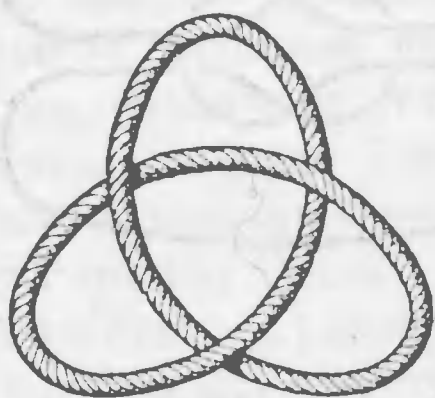


Рис. 123.



Рис. 124.

Простейший из узлов изображен на рис. 123. Он так и называется — *простой узел*¹⁾.

Простой узел бывает двух типов — *левый* и *правый*. Если подвергнуть зеркальному отображению левый узел, то он превратится в правый. Название *правый* присвоено этому узлу потому, что если на

¹⁾ Заметим, что если концы «нити», на которой завязан узел, не соединены (см. рис. 124), то узел всегда можно «развязать». Поэтому в топологии рассматривают узлы либо на линиях, уходящих концами в бесконечность, либо на замкнутых линиях. Мы будем рассматривать узлы на замкнутых линиях.

образующей его линии задать направление (всё равно какое), то движение в этом направлении по участку (а) узла (рис. 125) согласуется по *правилу буравчика* («правый винт») с вращательным движением по той петле [участок (б)], которую «пронизывает» участок (а).

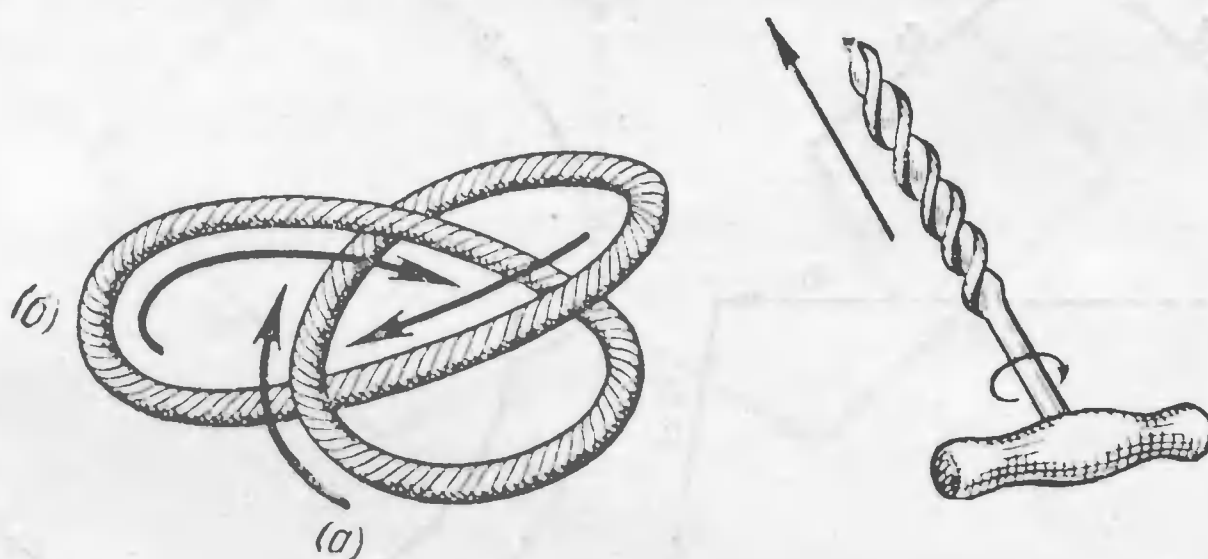


Рис. 125.

Интересно, что человек обычно привыкает завязывать один и тот же узел: одни завязывают всегда правый узел, другие — всегда левый.

Следующий по сложности узел — это *обычный двойной узел* [рис. 126¹⁾]; его не следует смешивать с так называемым *морским узлом* (рис. 127)

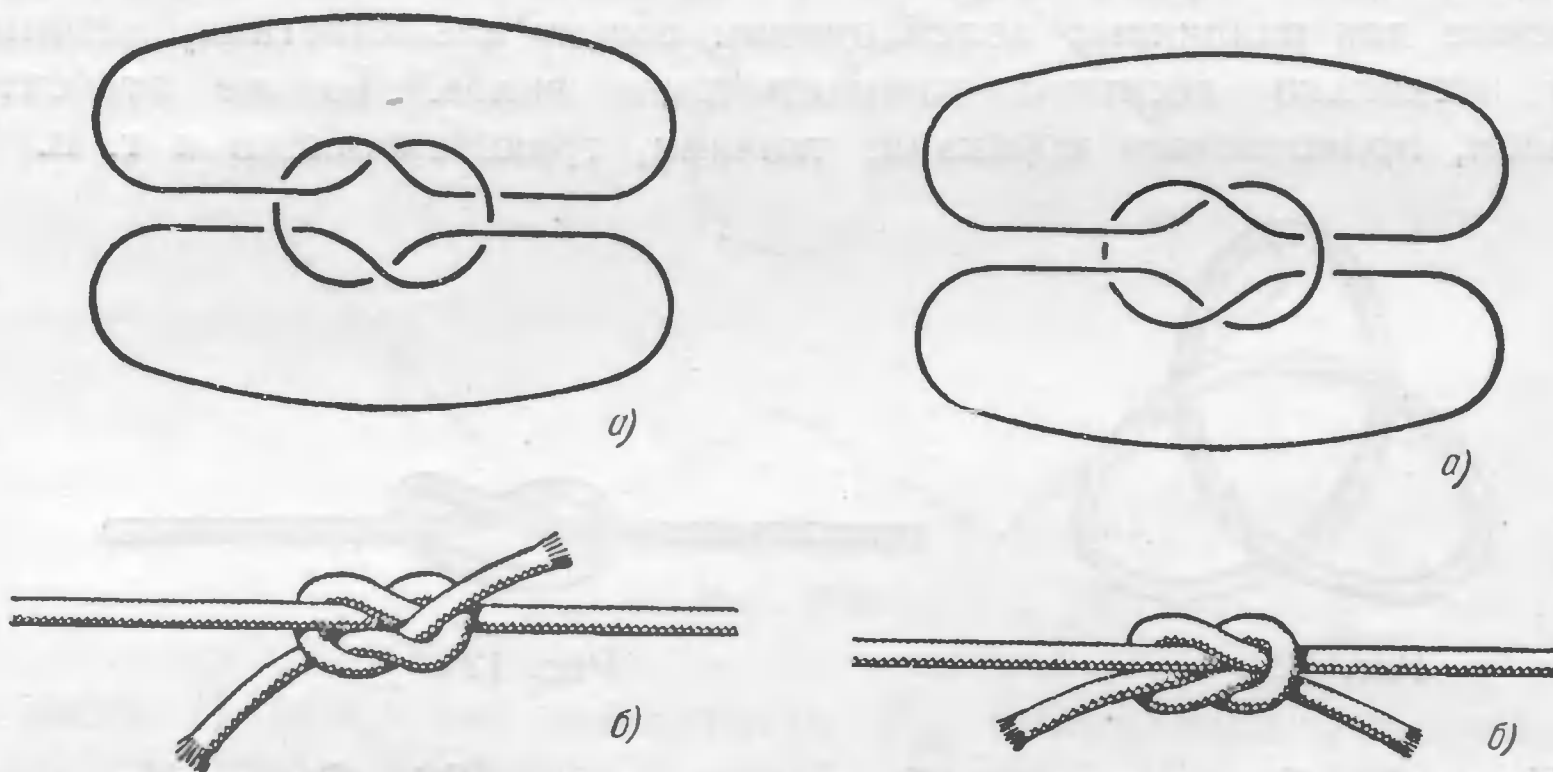


Рис. 126.

Рис. 127.

Важным вопросом топологии трехмерного пространства является следующая так называемая *проблема узла*:

В каком случае две простые замкнутые линии L_1 и L_2 (например, две замкнутые ломаные) трехмерного пространства можно

¹⁾ На рис. 126, а дана схема обычного двойного узла (на замкнутой линии); вид этого узла показан на рис. 126, б. То же относится к рис. 127.

считать «топологически одинаково расположенными» в пространстве?

Несколько неопределенный термин «одинаково расположенные» фигуры уточняется следующим важным понятием *изотопии* двух фигур: два множества L_1 , L_2 , лежащие в топологическом пространстве R , называются *топологически одинаково расположенными* в этом пространстве, или *изотопными* в R , если существует такое топологическое отображение пространства R на себя, которое переводит множество L_1 в L_2 .

Таким образом, проблема узла заключается в нахождении условий изотопности двух замкнутых ломаных L_1 и L_2 в пространстве E_3 .

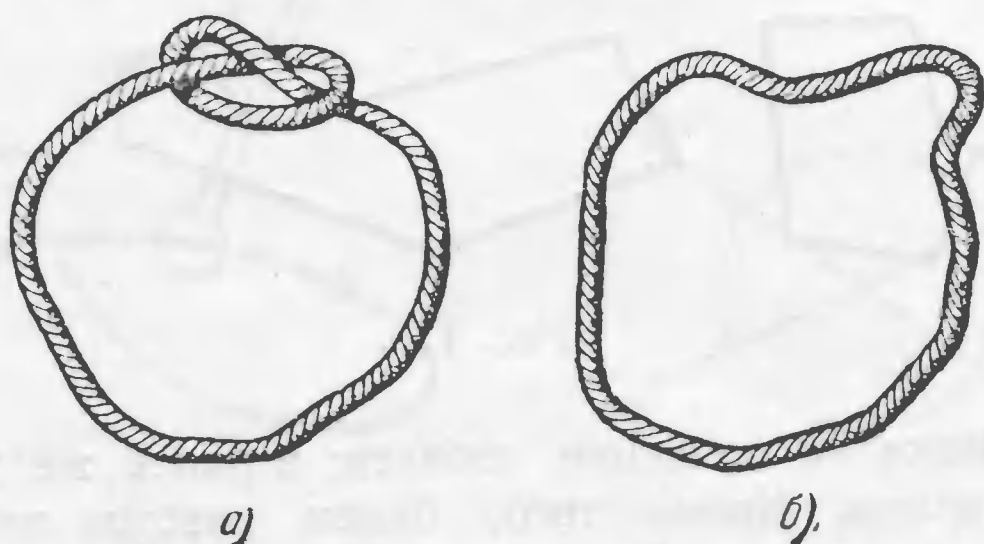


Рис. 128.

Представляется, например, наглядно очевидным, что заузленная (завязанная узлом) линия и незаузленная линия (рис. 128, а и б) не являются топологически одинаково расположенными (т. е. неизотопны). Однако как это доказать?

Полное решение проблемы узла неизвестно до сих пор. Однако известны различные топологические инварианты узлов, позволяющие в ряде случаев отличать узлы друг от друга. Наиболее простым и важным инвариантом некоторого узла L является так называемая *группа узла*: она определяется как фундаментальная группа $F(E_3 \setminus L)$ дополнительного пространства $E_3 \setminus L$ (т. е. трехмерного пространства E_3 , из которого исключены точки, принадлежащие узлу L). Мы будем обозначать группу узла через $G(L)$, т. е. $G(L) = F(E_3 \setminus L)$. Если L_1 и L_2 — такие узлы, что группы $G(L_1)$ и $G(L_2)$ не изоморфны между собой, то эти узлы неизотопны (это вытекает из топологической инвариантности фундаментальной группы).

Укажем теперь способ фактического расчета группы узла. Спроектируем нашу замкнутую ломаную L на «горизонтальную» плоскость. Получившаяся на плоскости линия (проекция узла L) может оказаться пересекающей самое себя; однако мы можем предположить (немного сдвинув, если нужно, некоторые из звеньев), что проекция имеет лишь *двойные* точки пересечения и не имеет других особенностей (возможные особенности указаны в верхней половине рис. 129; ниже на этом же

чертеже показаны способы устранения этих особенностей). Итак, мы будем считать, что в каждой точке пересечения на проекции пересекаются ровно два звена ломаной. Мы условимся на чертежах прерывать то из этих звеньев, которое проходит ниже второго

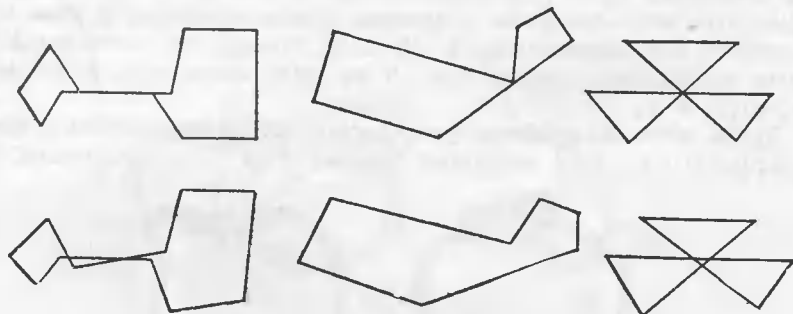


Рис. 129.

из пересекающихся на проекции звеньев; верхнее же звено условимся оставлять сплошным. Кроме того, будем вместо ломаной рисовать плавную линию без углов. В результате получится наглядный рисунок пространственной линии L (рис. 130). Эту «схему узла» мы будем называть *нормальной проекцией узла*.

Укажем теперь, как с помощью нормальной проекции можно вычислить группу узлов. Вся проекция разбита на некоторое число n дуг,

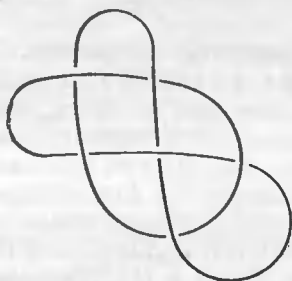


Рис. 130.

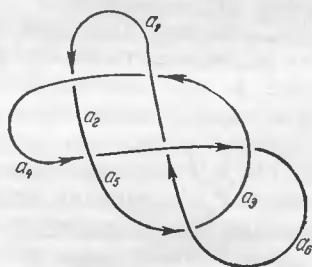


Рис. 131.

отделенных друг от друга перерывами; эти дуги мы обозначим через a_1, a_2, \dots, a_n , а соответствующие участки линии L — через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; кроме того, выберем определенное направление обхода на линии L и отметим его стрелками на дугах a_1, a_2, \dots, a_n (рис. 131). Теперь для построения фундаментальной группы возьмем в пространстве точку o , расположенную выше кривой L и из нее проведем путь («петлю»), охватывающий дугу α_k и обходящий ее в направлении, соответствующем

щем правилу буравчика (рис. 132). Такой путь обозначим через x_k . Пути x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), точнее, гомотопические классы этих путей, являются образующими фундаментальной группы $F(E_s \setminus L)$, т. е. группы узла: нетрудно понять, что любой путь в дополнительном пространстве гомотопен некоторой комбинации этих n путей. Остается составить *определяющие соотношения* между этими образующими.

Для этого рассмотрим какую-нибудь двойную точку проекции, и пусть сходящиеся в этой точке дуги обозначены, как указано на рис. 133.

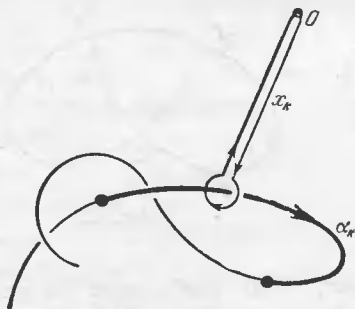


Рис. 132.

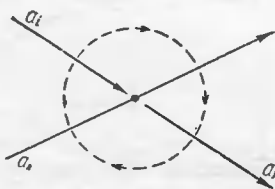


Рис. 133.

Обойдем теперь вокруг двойной точки по небольшой окружности по часовой стрелке, выписывая одновременно некоторый одночлен. Именно, если некоторая дуга проекции входит внутрь окружности, то мы возьмем соответствующий символ x в степени $+1$. Если же дуга выходит из окружности, то соответствующий символ x возьмем в степени -1 . Таким образом, обойдя по окружности вокруг двойной точки, мы пересечем последовательно все четыре сходящихся в этой точке луча и выпишем — слева направо — произведение четырех множителей. Это произведение мы приравняем единице. Например, для двойной точки, изображенной на рис. 133, мы получим соотношение

$$x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k = 1.$$

(Нетрудно наглядно представить себе, что путь $x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k$ действительно гомотопен нулю в $E_s \setminus L$.) Такое соотношение можно выписать для каждой двойной точки проекции. Оказывается, что, написав эти соотношения для всех двойных точек, мы и получаем полную систему соотношений между образующими x_1, x_2, \dots, x_m .

Примеры

1. Рассмотрим узел, проекция которого изображена на рис. 134. Группа этого узла имеет две образующих x_1, x_2 (соответствующих дугам a_1, a_2 на проекции), между которыми имеются два соотношения (в двойных точках p_1, p_2):

$$x_1^{-1} x_1 x_1 x_2^{-1} = 1, \quad x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_2 = 1.$$

Оба эти соотношения сводятся к одному: $x_1 = x_2$, и фундаментальная группа этого узла оказывается свободной циклической, т. е. такой же группой, как и у окружности (незаузленной). Это и понятно, так как из рис. 134 ясно, что рассматриваемый узел изотопен окружности.

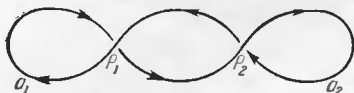


Рис. 134.

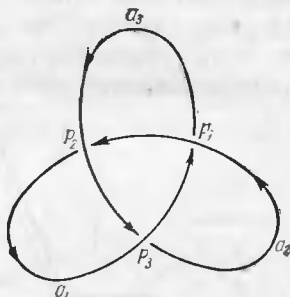


Рис. 135.

2. Проекция простого узла (рис. 123) изображена на рис. 135. Соотношения между образующими x_1, x_2, x_3 (взятые в двойных точках P_1, P_2, P_3) имеют вид

$$x_2 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} = 1, \quad x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1, \quad x_1 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} = 1.$$

Эти соотношения легко упростить: положив $x_1 = x$, $x_2 = y$, мы из второго соотношения найдем $x_3 = yxy^{-1}$, после чего первое соотношение (так, как и третье) даст нам $xyx = yxy$. Таким образом, группа рассматриваемого узла имеет две образующих x, y и единственное соотношение $xyx = yxy$.

Можно показать, что эта группа некоммутативна и потому, конечно, не изоморфна бесконечной циклической группе. Следовательно, узел, изображенный на рис. 123, не изотопен окружности (и, в частности, не может быть развязан без разрезания нити).

3. Приведенные выше рассуждения могут быть без изменения применены к более сложным узлам, состоящим из нескольких простых замкнутых линий, переплетенных между собой. Мы ограничимся рассмотрением узла, состоящего из трех окружностей, сцепленных между собой так, как указано на рис. 136 (разумеется, для того чтобы привести окружности в указанное расположение, нужно их слегка изогнуть в пространстве). Нетрудно видеть, что если разорвать любую из трех окружностей, то остальные две окажутся не сцепленными. Однако, *не разрывая ни одной из этих окружностей, их «разнять» нельзя*, т. е. изображенный узел не изотопен системе трех отдельно лежащих окружностей.

Для доказательства этого факта достаточно установить, что фундаментальная группа этого узла *не изоморфна свободной группе с тремя*

образующими (ибо группа узла, состоящего из трех отдельно лежащих окружностей, является свободной группой с тремя образующими). Группа узла, изображенного на рис. 136, имеет шесть образующих a_1, \dots, a_6 , связанных шестью соотношениями (для точек пересечения p_1, \dots, p_6). Эти соотношения имеют, как нетрудно убедиться, вид:

$$\begin{aligned} a_1^{-1} a_5^{-1} a_2 a_5 &= 1, & a_4^{-1} a_2 a_3 a_2^{-1} &= 1, \\ a_4^{-1} a_6^{-1} a_4 a_5 &= 1, & a_1 a_3^{-1} a_1^{-1} a_4 &= 1, \\ a_1 a_6^{-1} a_2^{-1} a_6 &= 1, & a_6 a_3 a_5^{-1} a_3^{-1} &= 1. \end{aligned}$$

Положив $a_1 = x$, $a_3 = y$, $a_5 = z$, мы найдем в силу первого, четвертого и шестого из написанных соотношений

$$\begin{aligned} a_2 &= zxz^{-1}, & a_4 &= xux^{-1}, \\ a_6 &= yzy^{-1}, \end{aligned}$$

после чего остальные соотношения дадут нам:

$$\begin{aligned} xux^{-1}zx &= yzy^{-1}xy = \\ &= zxz^{-1}yz. \end{aligned}$$

Итак, группа узла, изображенного на рис. 136, имеет три образующие x, y, z , связанные тремя указанными соотношениями. Остается воспользоваться тем фактом, что группа, имеющая n образующих, между которыми имеется хотя бы одно нетривиальное соотношение, не изоморфна свободной группе с n образующими. Это предложение доказывается (совсем не просто!) в теории групп.

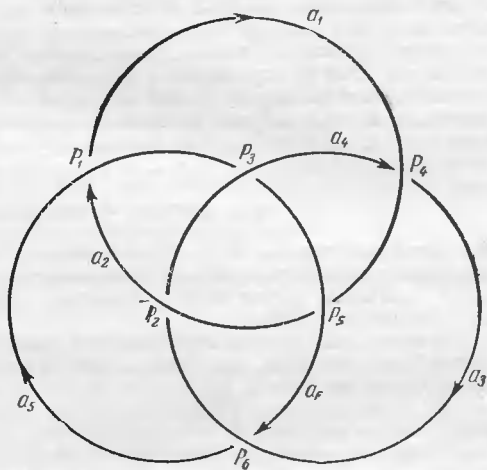


Рис. 136.

Добавление

Некоторые понятия теории групп

Напомним читателю некоторые простейшие понятия из теории групп, используемые в настоящей статье.

Группой, как известно, называется произвольная совокупность элементов, в которой определена операция, сопоставляющая каждому двум элементам a и b третий элемент $ab = c$ («групповое умножение»), обладающая свойствами:

1° для любых трех элементов a, b, c имеет место равенство

$$(ab)c = a(bc) \text{ (ассоциативность умножения);}$$

2° существует такой элемент e или 1 («единица» группы), что для каждого элемента a имеет место равенство $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

3° для каждого элемента a группы существует такой элемент a^{-1} («обратный элемент»), что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Если, помимо того, для каждого двух элементов a и b группы $ab=ba$ (условие коммутативности), то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*, в противном случае — *некоммутативной*. Если общее число элементов группы конечно, то группа называется *конечной*; в противном случае — *бесконечной*.

Из определения группы следует, что наряду с каждым элементом a в нее входят также элементы $aa=a^2$, $a^2a=a^3$, $a^3a=a^4$, ... и т. д. Если этими элементами исчерпываются все элементы группы (при этом и единица 1 должна представляться в виде степени элемента a : $a^n=1$), то группа называется *циклической*; при этом фигурирующая выше степень n называется *порядком* циклической группы. Очевидно, что циклическая группа порядка n содержит ровно n элементов: $a, a^2, a^3, \dots, a^n=1$; подобную группу составляют, например, n (комплексных) корней n -й степени из 1 или вычеты по модулю n (где за «групповое умножение» принято сложение классов вычетов). К числу циклических групп причисляется также и *бесконечная циклическая группа*, образованная всевозможными целыми (положительными, отрицательными и нулевой) степенями одного элемента a ; здесь считается $a^0=1$. Таковую группу образуют все целые числа, если за «групповое умножение» принять сложение целых чисел.

Циклическую группу также называют группой, «порождаемой» одним элементом a . Вообще группа называется порождаемой какими-то своими элементами a, b, c, \dots , если каждый элемент группы можно представить в виде произведения элементов a, b, c, \dots и обратных к ним, т. е. в таком, например, виде:

$$x = acb^{-1}aac^{-1}c^{-1}bbb = acb^{-1}a^2c^{-2}b^3.$$

При этом элементы a, b, c, \dots называются *образующими элементами* группы. Разумеется, система образующих элементов группы может выбираться разными способами; всегда можно, например, принять за образующие элементы все элементы группы.

Понятно, что своими образующими элементами группа совсем не определяется; так, например, все циклические группы имеют одну и ту же систему образующих элементов, состоящую из одного элемента. Для того, чтобы задать группу, надо указать, кроме образующих элементов, еще все существующие между этими элементами соотношения (так называемые *определяющие соотношения*); эти соотношения можно записывать в виде равенств друг другу некоторых комбинаций образующих элементов (например, $ab^2c^{-2}b^2=ba^{-2}c^2b$) или в виде равенства некоторых комбинаций образующих элементов единице группы (так, выписанное выше соотношение можно также переписать так: $ab^2c^{-2}ba^2c^{-2}b^{-1}=1$). *Образующими элементами и определяющими соотношениями группа уже вполне определяется*; элементами группы можно считать всевозможные «цепочки» образующих элементов («слова», если принять образующие элементы за «буквы» некоторого «алфавита»), причем в этих «цепочках» или «словах» можно отбрасывать стоящие подряд комбинации образующих элементов, равные 1 в силу определяющих соотношений (а также все стоящие рядом пары взаимно обратных элементов a и a^{-1}). Если группа не имеет никаких определяющих соотношений, то она называется *свободной группой*; так, бесконечная циклическая группа представляет собой свободную группу с одним образующим элементом. Пример группы, не являющейся свободной, доставляет, хотя бы, циклическая группа n -го порядка; эта группа имеет один образующий элемент a и одно определяющее соотношение $a^n=1$.

(Окончание в 6-м выпуске)

ТЕОРИЯ ИГР

Г. Ф. Боненблуст

(H. Frederic Bohnenblust, США)

От редакции. Статья профессора Калифорнийского технологического института д-ра Г. Ф. Боненблуста включена в сборник «Современная математика для инженеров» [коллектива авторов под ред. Э. Ф. Беккенбаха: «Modern Mathematics for the Engineer», Edited by E. F. Beckenbach, New York — Toronto — London, 1956; E. H. Frederic Bohnenblust, The Theory of Games, стр. 191—210¹⁾.]

Перевод статьи снабжен некоторыми пояснениями и дополнениями. Они включены в основной текст и помещены в угловых скобках < >.

От читателя требуется знакомство с элементами математического анализа и теории вероятностей. Краткая сводка сведений из теории вероятностей, использованных в статье, дана в добавлении, помещенном после перевода.

1. Введение

Хотя теория игр получила применение в самых различных областях, она является в основном *теорией планирования*. Термин «планирование» применяется в весьма широком смысле. Речь идет о планировании поведения для достижения некоторого результата в условиях, когда этот результат зависит не только от действий стороны, заинтересованной в его достижении, но и от действий других сторон, интересы которых отличны от интересов первой стороны или даже противоположны им.>

Теория игр занимается исследованием оптимального (наивыгоднейшего) образа действий. При таком исследовании предполагается, что все исходные условия ясно сформулированы. Именно, предполагаются известными *допустимые действия*, их *последствия* и *цель*, к которой стремится каждый участник игры. Отправляясь от этих исходных данных, теория игр пытается объективно проанализировать положение, которое возникает в результате столкновения интересов участников игры. При этом учитывается тот факт, что в момент, когда требуется

¹⁾ Перевод этого сборника на русский язык выпускается Изд-вом иностранной литературы. Рецензия на сборник помещена в настоящем выпуске «Математического просвещения» на стр. 309—318.

принять решение об образе действия, прошлые и будущие действия участников игры могут быть известны не полностью. Окончательной задачей теории является определение оптимального образа действий для каждого из участников и оценка выигрыша, на который каждый из участников может рассчитывать.

В настоящее время еще не существует законченной универсальной теории, решающей поставленную задачу в столь общем виде. На пути создания такой теории стоят как принципиальные, так и технические трудности. Хорошо разработанным является случай игры с двумя противниками, интересы которых прямо противоположны. Более сложные случаи изучаются либо непосредственно, либо, если это возможно, некоторых участников игры объединяют в коалиции и сводят задачу к случаю игры с двумя противниками.

Ситуации, при которых возникает потребность в применении теории игр, встречаются в анализе операций, в стратегическом планировании и в тактических задачах. Теория игр имеет важное значение в экономике; в частности, она тесно связана с теорией линейного программирования. Наконец, либо непосредственно (своими результатами), либо косвенно (своими методами) теория игр связана с другими областями математики, в особенности с математической статистикой¹⁾.

Такие игры, как шахматы, покер и бридж, представляют собой превосходные примеры применения теории игр, по крайней мере с принципиальной стороны. Но технически эти игры слишком сложны для их полного исследования.

В правилах игры перечисляются допустимые ходы и указывается, как в конце игры подсчитать сумму, которую каждый игрок выигрывает или выплачивает. Естественно предполагать, что цель каждого игрока состоит в получении максимального выигрыша.

Попытка Паскаля исследовать игры, основанные на чистом случае, была одним из поводов для возникновения теории вероятностей. В таких играх каждый ход появляется не в результате выбора игрока, а является случайным с известной вероятностью его появления. Анализ чисто случайной игры основан на понятии *математического ожидания*²⁾. Если числа p_1, p_2, \dots, p_n представляют собой вероятности n событий, одно из которых обязательно осуществляется, и если числа a_1, a_2, \dots, a_n представляют собой соответственные значения выигрышей в случае наступления этих событий, то сумма

$$a = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$$

называется *математическим ожиданием* выигрыша. Математическое ожидание представляет собой предел среднего значения выигрышей

¹⁾ О связи теории игр с различными направлениями современной математики говорится в других статьях сборника «Современная математика для инженеров» (см. примечание в начале настоящей статьи). (Прим. перев.)

²⁾ См. Добавление, п. 3.

игрока при повторении игры¹⁾, и оно же может быть использовано в качестве хорошего способа оценить ставку игрока перед фактическим осуществлением игры.

Случайные ходы вовсе не исключаются в теории игр. Они играют в ней специальную роль, и такое понятие, как математическое ожидание, является основным для теории игр. Впрочем, чисто случайные игры будут представлять для нас весьма небольшой интерес. В таких играх игроки не влияют на ход игры и борьба между ними в их действиях не проявляется.

В начале 30-х годов XX ст. Дж. фон Нейман начал интересоваться более общими вопросами теории игр. В своей фундаментальной статье он установил начала этой теории и получил ее основной результат. Позднее, в сотрудничестве с О. Моргенштерном он написал обширный труд²⁾, в котором, в частности, приведены аргументы, поясняющие важное значение теории игр для экономики. В последнее десятилетие эти темы явились предметом многочисленных исследований. Было показано, что результаты Неймана приложимы к обширному классу явлений. При этом выяснилась также возможность приложения теории игр к разнородным специальным задачам, и тем самым обнаружились ее интересные связи с другими областями математики. Наконец, были разработаны и более эффективные методы решения задач теории игр³⁾.

2. Постановка задачи

Модель ситуации, характерной для теории игр, заманчиво проста. Рассматривается случай, когда в игре имеются два противника с прямо противоположными интересами.

Пусть дан разграфленный <на строки и столбцы> прямоугольник или квадрат, в каждой ячейке которого вписано число. Первый игрок выбирает строку, а его противник — столбец. Пусть результат этих двух решений измеряется числом, стоящим на пересечении выбранной строки и столбца. Мы будем считать, что каждый игрок делает свой выбор, не имея никаких сведений о выборе своего противника. Цель первого игрока состоит в том, чтобы полученное таким способом число оказалось как можно большим, а цель второго — чтобы оно оказалось как можно меньшим.

¹⁾ См. Добавление, п. 4.

²⁾ J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economical Behavior*, 2-е изд., N. Y., 1947.

³⁾ Приводим некоторые работы по теории игр:

1. D. Blackwell and M. A. Girschik, *Theory of Games and Statistical Decisions*, N. Y., 1954. Выходит русский перевод: Д. Блекуэлл и М. А. Гиршик, *Теория игр и статистических решений*.
2. H. W. Kuhn, *Lectures of the Theory of Games*, N. Y., 1950.
3. J. Mc. Donald, *Strategy of Poker, Business and War*, N. Y., 1950.
4. J. C. C. McKinsey, *Introduction to the Theory of Games*, N. Y., 1952.
5. J. D. Williams. *The Compleat Strategyst*, N. Y., 1954.

«На первый взгляд приведенная «игра» может показаться довольно неинтересной и очень искусственной. Однако к такой схеме приводится целый класс весьма содержательных теоретических и практических задач, относящихся к случаю, когда исход борьбы двух противников может быть оценен числом. Если речь идет об игре в буквальном смысле этого слова, в которой игроки делают ставки, то в качестве такого числа принимается выигрыш одного из игроков (проигрыш естественно отождествлять с выигрышем отрицательного числа). В военном деле результат борьбы двух противных сторон может оцениваться вероятностью поразить защищаемую цель, отношением средних затрат на разрушение цели, стоимости самой цели и т. п.

В простейшем случае предполагается, что каждый из противников располагает некоторой конечной совокупностью «стратегий», из которой он выбирает какую-нибудь одну. *Стратегия* — это весьма общий термин, принятый в теории игр для описания самых различных схем поведения игроков. Иногда под стратегией целесообразно понимать целую систему ходов или действий, иногда — совокупность каких-либо параметров, которыми распоряжаются игроки, иногда — элементы еще более абстрактной природы. На дальнейших примерах читатель сможет наглядно уяснить себе содержание этого понятия. Для дальнейшего важно то, что выбор *обоими* игроками их стратегий *однозначно* определяет исход игры.

Результат борьбы между противниками зависит, естественно, от того, какую именно стратегию выберет каждый из них. Пусть стратегии первого противника («игрока») перенумерованы числами от 1 до m , а стратегии второго — от 1 до n . Числа, которыми оцениваются результаты борьбы противников при выборе различных пар стратегий, можно расположить в прямоугольную таблицу с m строками и n столбцами. На пересечении i -й строки и j -го столбца помещается число f_{ij} , оценивающее результат борьбы в том случае, когда первый игрок выбирает i -ю из своих стратегий, а второй — j -ю стратегию из своих ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). Числовой критерий f_{ij} выбирается так, что большим f_{ij} соответствует более полное удовлетворение интересов первого игрока и, следовательно, наоборот, чем меньше f_{ij} , тем выгоднее это для второго игрока. Именно поэтому первый игрок стремится к повышению, а второй — к понижению значений f_{ij} .

Кардинальный вопрос состоит в том, какими же принципами выбора должен руководствоваться каждый из игроков и каков ожидаемый результат.

Сказанное выше иллюстрирует важную особенность теории игр, ограничивающую ее применение. Именно, предполагается, что интересы каждого участника игры могут быть измерены с помощью *числа*. Более того, забегая немного вперед, следует отметить еще одно предположение, вытекающее из методов теории игр. Оно состоит в том, что для измерения интересов игроков можно использовать понятие математического ожидания. (Точные соображения и причины, приводящие

к необходимости такого предположения, будут изложены ниже, в п. п. 4 и 5, в связи с рассмотрением понятия оптимальной смешанной стратегии.)

Два факта являются характерными для рассматриваемого нами простейшего случая. Во-первых, каждый игрок принимает *одно* решение и при этом находится в полном неведении относительно решения, принимаемого противником. Во-вторых, общее число допустимых действий, равное произведению числа строк на число столбцов, *конечно*.

Первый факт является только кажущимся упрощением, так как и более сложные ситуации могут быть сведены к этому случаю. Впрочем, точное описание таких ситуаций слишком длинно для того, чтобы приводить его во всех подробностях. (Последний пример в этой статье — см. п. 10 — выбран с расчетом иллюстрировать некоторые способы сведения общего случая к простейшему. Этой же цели служат и некоторые дополнительные замечания в п. 10.)

Второй факт является более существенным. Если общее число допустимых действий бесконечно, то возникают дополнительные трудности, которые в некоторых случаях могут оказаться критическими. Примером игры с бесконечным числом допустимых действий служит следующее непосредственное обобщение рассмотренной модели.

Пусть нам дана функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y . Предположим для определенности, что x и y могут изменяться в единичном интервале: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Первый игрок выбирает значение x , а второй — значение y ; при этом первый игрок старается максимизировать значение функции $f(x, y)$, в то время как второй старается это значение минимизировать¹⁾. <Задача каждого из игроков отнюдь не сводится лишь к отысканию соответственно максимума или минимума функции $f(x, y)$ в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Особенность ситуации, возникающей в теории игр, состоит в том, что первый игрок заботится об увеличении функции $f(x, y)$, распоряжаясь лишь *одним переменным* x и зная, что его противник, распоряжающийся переменным y , стремится к противоположной цели; в аналогичном положении находится второй игрок, распоряжающийся лишь переменным y >.

Модель, приведенная вначале, получается из этого общего случая, если считать, что переменные x и y могут принимать лишь целые положительные значения: $x = 1, 2, \dots, m$ и $y = 1, 2, \dots, n$, и полагать $f(i, j) = f_{ij}$.

Методы и основные результаты теории игр мы будем излагать применительно к общему случаю: игра полностью задается функцией $f(x, y)$ и указанием на природу и область изменения независимых переменных x и y .

¹⁾ Меняя природу независимых переменных, мы можем получить другие примеры. Можно, например, заменить x точкой плоскости, принадлежащей некоторой области, или, иначе, заменить переменную x парой независимых переменных (x_1, x_2) , подчиненных некоторому ограничительному соотношению.

Еще более общий случай, когда в игре участвует более чем два игрока или же когда интересы игроков не являются прямо противоположными, в настоящее время полностью не изучен. Модель игры для этого общего случая выглядит следующим образом: действия всех партнеров характеризуются независимыми переменными x, y, \dots, z , интересы участников игры измеряются соответственно функциями $f(x, y, \dots, z)$, $g(x, y, \dots, z)$, \dots , $h(x, y, \dots, z)$, и каждый из участников старается увеличить значение своей функции.

Таким образом, мы собираемся изучать частный случай только что приведенной модели, когда число участников игры равно двум и когда функции f и g , характеризующие их интересы, таковы, что для всех значений x и y функция $g(x, y) = -f(x, y)$; иначе, сумма $f(x, y) + g(x, y)$ равна нулю. Этот частный случай обычно называют *игрой с двумя участниками и нулевой суммой*.

3. Оптимальные чистые стратегии

Вернемся к вопросу о том, какие же стратегии должны выбирать участники игры и каков ожидаемый результат их действий. В теории игр принята следующая схема, отвечающая нашему представлению о разумном поведении.

Рассмотрим игру с двумя участниками и нулевой суммой, описываемую с помощью функции $f(x, y)$ ¹⁾; для простоты мы будем считать x и y целыми числами: $1 \leq x \leq m$, $1 \leq y \leq n$.

Обозначим через

$$\min_y f(x, y)$$

минимальное значение, достигаемое функцией $f(x, y)$, когда первым игроком выбрано переменное x , а y может принимать любые значения от 1 до n ; другими словами, $\min_y f(x, y)$ представляет собой наименьшее число в x -й строке нашего разграфленного прямоугольника. Это число зависит только от x . Заставляя x пробегать все значения от 1 до m , мы можем вычислить число

$$v_1 = \max_x \left[\min_y f(x, y) \right].$$

Пусть x_0 представляет собой значение x , при котором этот максимум реализуется; иными словами,

$$v_1 = \min_y f(x_0, y).$$

Отсюда следует, что $v_1 \leq f(x_0, y)$ независимо от значения y .

¹⁾ Вторая функция $g(x, y)$ определяется соотношением $g(x, y) = -f(x, y)$.
(Прим. перев.)

Этот факт может быть истолкован следующим образом. Первый игрок может выбрать такую стратегию (именно, выбрать $x=x_0$), что функция $f(x, y)$ окажется не меньше v_1 , какие бы действия ни принял его противник.

Первый игрок может даже информировать противника о своем намерении выбрать x_0 и не беспокоиться о том, воспользуется ли противник этими сведениями или нет. Он может быть уверен, что при любых обстоятельствах значение $f(x, y)$ окажется не меньше чем v_1 .

Если мы поменяем роли первого и второго игроков, то придем к величине

$$v_2 = \min_y \left[\max_x f(x, y) \right].$$

Таким образом, второй игрок располагает стратегией, при которой функция $f(x, y)$ не может превзойти v_2 .

Исходя из смысла чисел v_1 и v_2 , можно доказать неравенство

$$v_1 \leq v_2.$$

⟨Действительно, существует такое x_0 , что $v_1 = \min_y f(x_0, y)$, и такое y_0 , что $v_2 = \max_x f(x, y_0)$.

Отсюда имеем

$$v_1 = \min_y f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq \max_x f(x, y_0) = v_2.$$

Итак, $v_1 \leq v_2$ и из $v_1 = v_2$ вытекает $v_1 = v_2 = f(x_0, y_0)$.

Можно привести примеры, когда осуществляются обе возможности: $v_1 = v_2$ и $v_1 < v_2$.

⟨Рассмотрим в качестве примера таблицу 1, число строк которой $m=3$, а число столбцов $n=4$. Для того чтобы найти v_1 , подсчитаем

$$\min_y f(1, y) = -2,$$

$$\min_y f(2, y) = 5$$

и

$$\min_y f(3, y) = -2.$$

Число $v_1 = \max_x \left[\min_y f(x, y) \right]$ совпадает с наибольшим из этих трех чисел, т. е. равно 5.

Точно так же, полагая $y=1, 2, 3, 4$, находим

$$\max_x f(x, 1) = 10, \quad \max_x f(x, 2) = 5, \quad \max_x f(x, 3) = 6, \quad \max_x f(x, 4) = 7.$$

Таблица 1

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	-2	4	-1	6
2	10	5	6	7
3	-1	2	0	-2

Число v_2 совпадает с наименьшим из этих четырех чисел, т. е. $v_2 = 5$. Итак, $v_1 = v_2 = 5 = f(2, 2)$ (т. е. $x_0 = 2, y_0 = 2$).

Напротив, для игры с таблицей 2 находим $v_1 = 1, v_2 = 2$. Таким образом, здесь $v_1 < v_2$.

Таблица 2

$x \backslash y$	1	2
1	2	1
2	-1	3

Нетрудно видеть, что если $v_1 = v_2 = f(x_i, y_j)$, то v_1 является одновременно наименьшим числом из i -й строки и наибольшим числом из j -го столбца таблицы, характеризующей игру. > Различие между случаями $v_1 = v_2$ и $v_1 < v_2$ чрезвычайно существенно. В первом случае все просто. Первый игрок располагает стратегией, которая обеспечивает ему по крайней мере $v_1 = v_2$, и, кроме того, он знает, что

противник имеет возможность помешать ему достигнуть большего значения $f(x, y)$. Аналогичный вывод может сделать для себя и второй игрок. Общее значение $v_1 = v_2$ является как бы компромиссом; стратегия x_0 является оптимальной для первого игрока; второй игрок также располагает оптимальной стратегией y_0 .

Мы хотим подчеркнуть, что компромиссное значение $v_1 = v_2$ получено отнюдь не в результате соглашения между противниками. Каждый из них действует сам по себе и не боится, что противник может с выгодой воспользоваться знанием его намерений.

Во втором случае ($v_1 < v_2$) остается пробел. <Рассмотрим, например, снова таблицу 2. Выбирая $x_0 = 1$, первый игрок обеспечивает себе не меньше чем $f(1, 2) = 1$. Но стоит ли это решение считать наилучшим? Ведь если противник выберет $y_0 = 2$, то лучше было бы выбрать $x = 2$. Однако легко предположить, что противник, предвидя это рассуждение, выберет $y = 1$, что снизит $f(x, y)$ при $x = 2$ до -1 . Но сделает ли это противник на самом деле? Ведь при $y = 1$ выбор $x = 1$ приведет к невыгодному для него значению $f(x, y) = 2$ и т. д.>

Вопрос о том, что считать наилучшей стратегией при *неравенстве* $v_1 < v_2$, является коренным в задаче об играх с двумя участниками и нулевой суммой. Решение этого вопроса не очевидно; оно требует введения нового понятия — так называемых *смешанных стратегий*. Стратегии, рассматривавшиеся до сих пор и сводившиеся к выбору некоторого фиксированного значения x (или y), мы будем называть теперь *чистыми стратегиями*.

Смешанные стратегии будут введены на примере, составляющем п. 4. Общему рассмотрению этого понятия посвящен п. 5.

Приведенные рассуждения ограничиваются случаем, когда области изменения x и y являются конечными множествами, т. е. каждый участник имеет выбор лишь из конечного числа допустимых ходов. В бесконечном случае максимумы и минимумы рассматриваемых функций могут не достигаться и вместо них приходится рассматривать точные верхние и нижние границы. Это обстоятельство является основной причиной встречающихся здесь трудностей.

4. Пример из области военно-стратегического планирования

Зададим функцию $f(x, y)$ формулой

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n k_i \max(x_i - y_i, 0)^1).$$

В этом примере каждое значение независимой переменной x представляет собой систему из n неотрицательных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , сумма которых равна заданному числу $A^2)$. Аналогично, независимое переменное y пробегает систему из n неотрицательных чисел (y_1, y_2, \dots, y_n) , сумма которых равна фиксированному числу $D^3)$. Постоянные k_1, k_2, \dots, k_n представляют собой заданные положительные числа, причем, не нарушая общности, мы можем предполагать, что они образуют невозрастающую последовательность: $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$. Отноительно заданных чисел A и D предполагается, что $D \leq A$.

Этот пример может быть очевидным образом интерпретирован в виде задачи из области экономики или военной стратегии. Он описывает существенные черты ситуации, возникающей при нападении и защите. Число A есть общая сила атакующего, а D — общая сила защиты. Эти силы выражены в какой-нибудь подходящей системе единиц, подобранных так, что одна единица каждой силы нейтрализует как раз одну единицу силы противоположной стороны. Атакуются и защищаются n целей, относительная важность или уязвимость которых измерены с помощью постоянных k_1, k_2, \dots, k_n . Вопрос, поставленный как перед атакующей, так и перед защищающейся стороной, состоит в том, *как распределить свои силы между различными целями*. Число x_i представляет собой долю сил, направленных для атаки на i -ю цель, а y_i — долю сил, направленных для защиты этой же цели.

Выражение $\max(x_i - y_i, 0)$, значение которого совпадает с наибольшим из двух чисел, $(x_i - y_i)$ и 0 , определяет долю силы x_i , способной «проникнуть» через оборону i -й цели. Назначение члена $k_i \max(x_i - y_i, 0)$ в нашем примере состоит в том, чтобы измерить успех атаки против i -й цели. (Мы не будем сейчас обсуждать, реальна ли обстановка, которую описывает используемый нами специальный вид функции $f(x, y)$. В зависимости от природы конкретной задачи при ее решении могут оказаться полезными функции $f(x, y)$ и другого вида.)

Чтобы иллюстрировать соображения, приведенные в п. 3, рассмотрим следующий численный пример.

¹⁾ O. Gross, Targets of Differing Vulnerability with Attack Stronger than Defense, Research Memorandum 359, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1950.

²⁾ Начальная буква слова Attack (атака, нападение). (Прим. ред.)

³⁾ Defense — защита. (Прим. ред.)

Положим

$$n=3, A=16, D=12, k_1=6, k_2=2, k_3=1.$$

Вычислим сначала v_2 . Несложное рассуждение показывает, что при фиксированной системе обороны (y_1, y_2, y_3) наиболее эффективной атака будет в том случае, когда вся сила A направлена против одной из целей. Следовательно, при заданных (y_1, y_2, y_3) значение максимума $f(x, y)$ совпадает с наибольшим из следующих трех чисел:

$$6(A - y_1), 2(A - y_2), (A - y_3).$$

При $y_1=11, y_2=1, y_3=0$ таким наибольшим числом является 30. Никакое другое распределение сил защиты не способно сделать значение $f(x, y)$ меньшим, так как неравенства

$$6(16 - y_1) \leq 30, 2(16 - y_2) \leq 30$$

влекут за собой неравенства $y_1 \geq 11, y_2 \geq 1$, откуда в свою очередь следует, что $y_1=11, y_2=1$ (ибо $y_1 + y_2 + y_3 = 12$). Таким образом, число v_2 равно 30, и чистая стратегия, состоящая в том, что на защиту первой цели направляется 11 единиц, а на защиту второй 1 единица (третья цель остается незащищенной), гарантирует, что успех атаки, измеренный с помощью $f(x, y)$, не будет превосходить 30.

Перейдем к вычислению v_1 . При фиксированной атаке (x_1, x_2, x_3) защита, ресурсы которой меньше ресурсов атакующей стороны, должна сосредоточить свои силы на обороне целей в порядке их важности или уязвимости. Таким образом,

$$\min_y f(x, y) = \begin{cases} 6(x_1 - 12) + 2x_2 + x_3, & \text{если } x_1 \geq 12, \\ 2[x_2 - (12 - x_1)] + x_3 & \text{» } x_1 < 12, \text{ а } x_1 + x_2 \geq 12, \\ x_3 - (12 - x_1 - x_2) & \text{» } x_1 + x_2 < 12. \end{cases}$$

<В первом случае выбирается система обороны $y_1=12, y_2=y_3=0$; во втором случае $y_1=x_1, y_2=12-x_1, y_3=0$; в третьем случае $y_1=x_1, y_2=x_2, y_3=12-x_1-x_2$ >

Легко видеть, что каждое из этих значений не превосходит 24, причем эта последняя величина достигается при стратегии $x_1=16; x_2=x_3=0$.

Таким образом, $v_1=24$, тогда как $v_2=30$.

Для дальнейшего анализа этого примера необходимо ввести *смешанную стратегию*¹⁾.

¹⁾ Рассматриваемый в тексте пример смешанной стратегии носит вводный характер. Систематическое изложение понятия о смешанных стратегиях проводится автором в следующих пунктах. После ознакомления с ними читателю будет полезно вернуться к разбираемому сейчас примеру игры. (Прим. перев.)

⟨Предположим, что игра повторяется многократно, но что принятие решения в каждом случае не зависит от результатов уже имевших место «столкновений». Сделаем выбор чистой стратегии защиты случайным. Выбрать смешанную стратегию в теории игр означает выбрать распределение вероятностей p_1, p_2, p_3 выбора чистых стратегий x_1, x_2, x_3 и вероятностей q_1, q_2, q_3 для выбора чистых стратегий y_1, y_2, y_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1, q_1 + q_2 + q_3 = 1$)¹⁾.

Если предполагать, что при многократном повторении игры математическое ожидание функции $f(x, y)$ является разумной характеристикой исхода серии повторений, то выбор смешанной стратегии приведет, как мы сейчас увидим, к лучшему результату, чем выбор чистой стратегии.⟩

Следует заметить, что смешанная стратегия, состоящая в том, что одна чистая стратегия указывается с вероятностью 1, а другие чистые стратегии — с вероятностью 0, сводится к выбору первой чистой стратегии. Это замечание показывает, что понятие смешанной стратегии есть обобщение понятия чистой стратегии; другими словами, каждая чистая стратегия может рассматриваться как смешанная.

Результат выбора смешанной стратегии оценивается с помощью математического ожидания выигрыша при данном распределении вероятностей чистых стратегий.

В рассмотренном только что примере важное значение имеет смешанная стратегия атакующего, заключающаяся в том, что с вероятностью $\frac{1}{4}$ полными силами производится атака против первой цели, с вероятностью $\frac{3}{4}$ полными силами производится атака против второй цели, а любые другие способы атаки исключаются. Атака полными силами против первой цели, когда защита определяется комбинацией (y_1, y_2, y_3) , дает функции $f(x, y)$ значение $6(A - y_1)$, а атака полными силами против второй цели приводит к значению $2(A - y_2)$. Математическое ожидание функции $f(x, y)$ равно для выбранной смешанной стратегии величине

$$\frac{1}{4} \cdot 6(A - y_1) + \frac{3}{4} \cdot 2(A - y_2) = \frac{3}{2} (2A - y_1 - y_2),$$

которая в нашем случае не может быть сделана меньше 30. Таким образом, используя смешанную стратегию, мы заполнили имевшийся у нас прежде пробел. Число 30 представляет собой верхнюю оценку успеха атаки, если защищающаяся сторона выбирала (как это и имело место) чистую стратегию, а атакующая сторона могла придерживаться смешанной стратегии.

Очень заманчиво, конечно, выяснить, какое преимущество может извлечь из применения смешанной стратегии защищающаяся сторона. Но раньше уже было установлено, что атакующая сторона может

¹⁾ См. Добавление, п. 3.

достигнуть числа 30; таким образом, никакая смешанная стратегия защиты не приведет к лучшему результату, чем найденная ранее оптимальная чистая стратегия, не позволяющая атакующему превзойти число 30. Формальное доказательство этого факта не вызывает затруднений.

5. Смешанные стратегии

Если игрок применяет чистую стратегию, то он указывает один из имеющихся в его распоряжении ходов. Если он применяет смешанную стратегию, он указывает вероятности этих ходов.

Использование смешанной стратегии преследует две цели. Во-первых, достигается большая гибкость, так как каждая чистая стратегия может рассматриваться как смешанная, если приписать ей вероятность 1. Пример, разобранный в предыдущем пункте, показывает, что такой выигрыш в свободе действий может принести существенную пользу. Во-вторых, использование смешанной стратегии приводит к замене значений функции $f(x, y)$ их математическим ожиданием. Как бы долго игрок ни применял определенную смешанную стратегию, он не может быть уверенным в том, что $f(x, y)$ приобретет некоторое определенное значение. Он может лишь утверждать, что этим свойством будет обладать математическое ожидание функции $f(x, y)$; фактические значения функции могут быть и меньше.

Использование смешанной стратегии, или, лучше сказать, переход к математическому ожиданию $f(x, y)$, имеет смысл только в том случае, когда математическое ожидание хорошо отражает интересы игроков. В теории игр предполагается, что дело обстоит именно так.

Мы увидим, что в некоторых случаях понятие математического ожидания возникает из внутренней природы задачи, а не только в результате применения смешанных стратегий. Это происходит, например, когда значение самой функции $f(x, y)$ представляет собой математическое ожидание, осредняющее последствия некоторых случайных ходов (см. ниже, п. 6).

С математической точки зрения, введение смешанных стратегий изменяет природу независимых переменных, фигурирующих в задаче. Исходные независимые переменные x и y являлись чистыми стратегиями. Новые независимые переменные — смешанные стратегии — мы будем обозначать символами p и q . Если, например, чистые стратегии игрока представляются целыми числами от 1 до m , то каждая его смешанная стратегия представляет собой совокупность (p_1, p_2, \dots, p_m) из m неотрицательных чисел, сумма которых равна единице. Изменение независимых переменных приводит и к изменению функции, измеряющей интересы игроков. Вместо функции $f(x, y)$ рассматривается новая функция $F(p, q)$; ее значение в точке (p, q) представляет собой математическое ожидание функции $f(x, y)$, когда распределение вероятностей x и y задается смешанными стратегиями p и q . В частности, если каждый из участников игры располагает конечным числом стратегий, описыва-

емых целыми числами (x — от 1 до m для первого участника и y — от 1 до n для второго), то функция $F(p, q)$ представляет собой следующую сумму mn слагаемых¹⁾:

$$F(p, q) = f(1, 1)p_1q_1 + f(1, 2)p_1q_2 + \dots + f(m, n)p_mq_n.$$

Основной результат теории игр с двумя участниками и нулевой суммой состоит в том, что для широкого класса случаев функция $F(p, q)$ удовлетворяет условию:

$$\max_p [\min_q F(p, q)] = \min_q [\max_p F(p, q)].$$

В этот класс случаев входят, в частности, все игры с конечным числом стратегий для каждого игрока.

В терминах п. 3 равенство $\max\text{-}\min = \min\text{-}\max$ выражает тот факт, что для смешанных стратегий имеет место соотношение $v_1 = v_2$, следствия из которого нам теперь уже ясны. Это общее значение $v_1 = v_2$ и дает оценку «компромисса», который не мог быть достигнут в п. 3, где использовались лишь чистые стратегии. Каждый из участников игры располагает теперь смешанной стратегией, которая (как это имело место для защищающейся стороны в примере п. 4) может сводиться и к чистой стратегии, обеспечивающей ему достижение уровня $v_1 = v_2$, безотносительно к действиям его противника. Значение $v = v_1 = v_2$ называется *ценой игры*.

⟨Приведем простой пример определения смешанной стратегии, используя для этой цели игру, упомянутую на стр. 60 (табл. 2).

Обозначим через p вероятность выбора первым игроком своей первой чистой стратегии. Тогда вероятность выбора им своей второй чистой стратегии определяется однозначно и равна $1 - p$. Аналогичным образом второй игрок выбирает свои чистые стратегии с вероятностями q и $1 - q$ соответственно. Вычислим $F(p, q)$ для рассматриваемой игры:

$$\begin{aligned} F(p, q) &= 2pq + 1 \cdot p(1 - q) + (-1)(1 - p)q + 3(1 - p)(1 - q) = \\ &= 5pq - 2p - 4q + 3. \end{aligned}$$

Найдем $\min_q F(p, q)$. Для этой цели представим $F(p, q)$ в следующем виде:

$$F(p, q) = (5p - 4)q + (-2p + 3).$$

Для определения $\min_q F(p, q)$ достаточно заметить, что при $5p - 4 > 0$ минимум $F(p, q)$ достигается при $q = 0$, а при $5p - 4 < 0$ — при

¹⁾ См. Добавление, п. 3.

$q = 1$. Таким образом,

$$\min_q F(p, q) = \begin{cases} 3p - 1 & \text{при } p \leq \frac{4}{5}, \\ -2p + 3 & \text{» } p > \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Теперь мы должны найти максимум этой функции от p . Так как функция $\min_q F(p, q)$ (рис. 1) при $p < \frac{4}{5}$ возрастает, а при $p > \frac{4}{5}$ убывает, то $\max_p [\min_q F(p, q)]$ достигается при $p = \frac{4}{5}$ и равен $\frac{7}{5}$. Представив далее $F(p, q)$ в виде

$$F(p, q) = (5q - 2)p + (-4q + 3)$$

и рассуждая аналогичным образом, найдем:

$$\max_p F(p, q) = \begin{cases} -4q + 3 & \text{при } q \leq \frac{2}{5}, \\ q + 1 & \text{» } q > \frac{2}{5}. \end{cases}$$

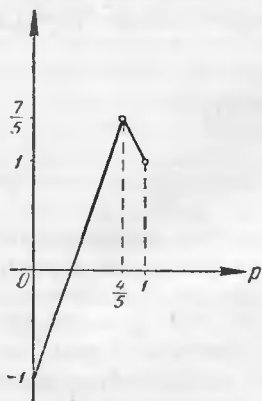


Рис. 1.

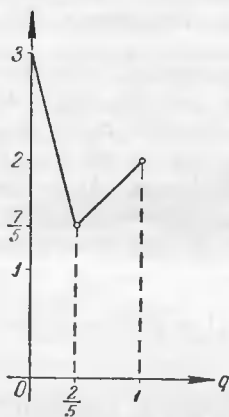


Рис. 2.

Отсюда $\min_q [\max_p F(p, q)] = \frac{7}{5}$ и соответствует значению $q = \frac{2}{5}$ (рис. 2). Таким образом, для достижения наилучшего результата $v = \frac{7}{5}$ первый игрок должен с вероятностью $\frac{4}{5}$ выбрать свою первую чистую стратегию и с вероятностью $\frac{1}{5}$ свою вторую чистую стратегию. Второй игрок должен выбирать свои чистые стратегии с вероятностями $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$ соответственно.

Из этого примера видно, что даже в простых случаях непосредственное вычисление наилучших смешанных стратегий требует довольно детальных рассмотрений. Трудности,

очевидно, возрастают вместе с ростом числа чистых стратегий x и y . В п. 9 читатель найдет указание на некоторые эффективные приближенные методы.

Нетрудно доказать важное неравенство

$$\max_x [\min_y f(x, y)] \leq v \leq \min_y [\max_x f(x, y)].$$

Действительно, при любом i и при любом q

$$\sum_{j=1}^n q_j f(x_i, y_j) \leq \max_p F(p, q),$$

так как левая часть есть $F(p, q)$ при частном значении p : все $p_k = 0$, $k \neq j$, $p_j = 1$. Далее,

$$\sum_{j=1}^n q_j \min_y f(x_i, y) \leq \sum_{j=1}^n q_j f(x_i, y_j).$$

Но так как $\sum_{j=1}^n q_j = 1$, то

$$\sum_{j=1}^n q_j \min_y f(x_i, y) = \min_y f(x_i, y).$$

Итак, при любом i и любом q

$$\min_y f(x_i, y) \leq \max_p F(p, q).$$

В частности, для любого i

$$\min_y f(x_i, y) \leq \min_q [\max_p F(p, q)] = v$$

и, следовательно,

$$\max_x [\min_y f(x, y)] \leq v.$$

Точно так же доказывается и вторая часть приведенного выше неравенства.

Теперь ясно, что переход к смешанной стратегии не только помогает игрокам сделать однозначный выбор их образа действий, но и приводит (в среднем!) к лучшему результату, чем тот, на который они могли рассчитывать, применяя чистые стратегии, обеспечивающие им $\max [\min f(x, y)]$ и $\min [\max f(x, y)]$ соответственно.)

Простое следствие из определения оптимальной смешанной стратегии приводит к общему принципу, важному для вычислений. (Мы рассмотрим подробнее этот принцип в примере тактического выбора времени, изложенном в следующем п. 6.) Пусть p' и q' — оптимальные стратегии. По определению, $F(p', y)$ ¹⁾ не меньше чем v , каково бы ни было значение y , а $F(x, q')$ не может превышать v ни при каком x . Эти неравенства влекут за собой соотношение:

$$F(p', y) = v$$

¹⁾ Здесь под y подразумевается смешанная стратегия, заключающаяся в выборе чистой стратегии y с вероятностью 1 и остальных чистых стратегий с вероятностью 0. Поэтому $F(p', y) = \sum_{k=1}^m p'_{kj} f(x_k, y)$. (Прим. перев.)

для всякой оптимальной смешанной стратегии p' и каждой чистой стратегии y , для которой оптимальной стратегией q' предусмотрена отличная от нуля вероятность.

⟨Докажем это утверждение. Имеем

$$v = F(p', q') = \sum_i \sum_j p'_i q'_j f(x_i, y_j) = \sum_j q'_j F(p', y_j),$$

где y_j пробегает все чистые стратегии y . Но для всех j $F(p', y_j) \geq F(p', q')$ и $q'_j \geq 0$. Если бы для некоторого $j = k$ было и $q'_k > 0$ и $F(p', y_k) > v$, то получилось бы, что

$$v = \sum_j q'_j F(p', y_j) > \sum_j q'_j v = v.$$

Таким образом, коль скоро определены чистые стратегии, вероятности которых при оптимальной смешанной стратегии отличны от нуля, мы вместо неравенств, с которыми затруднительно оперировать, получаем систему *уравнений*.

Мы ограничивались до сих пор случаем, когда число чистых стратегий конечно. В бесконечном случае описание смешанных стратегий более сложно. Если чистые стратегии выражаются действительными числами, скажем числами из интервала $0 \leq x \leq 1$, то смешанная стратегия представляется с помощью функции распределения $P(x)$. Такой способ включает в себя как случай, когда некоторым чистым стратегиям приписываются положительные вероятности, так и случай, когда вероятности чистых стратегий определяются плотностью вероятности $dP = p(x) dx$.

Функция $F(p, q)$, выражающая математическое ожидание функции $f(x, y)$, представляет собой теперь уже не сумму, а интеграл¹⁾:

$$\iint f(x, y) dP(x) dQ(y).$$

В п. 6 мы будем существенным образом пользоваться понятием плотности распределения.

6. Симметрия. Пример тактического выбора времени

Задача называется *симметричной*, если оба участника находятся в совершенно одинаковом положении; они располагают, в частности, одинаковыми возможностями, т. е. множества их чистых стратегий идентичны, и, следовательно, совпадают также совокупности их смешанных стратегий. Симметрия задачи выражается с помощью соотношения

$$f(x, y) = -f(y, x),$$

которое влечет за собой аналогичное соотношение и для смешанных стратегий: $F(p, q) = -F(q, p)$.

¹⁾ См. Добавление, п. 3.

Если задача имеет решение, т. е. если $\max\text{-}\min$ последней функции совпадает с ее $\min\text{-}\max$, то вследствие симметрии их общее значение v должно быть равно нулю. Таким образом, стратегия p оптимальна, если $F(p, y) \geq 0$ для любого y . Отметим, что если стратегия p оптимальна для одного из игроков, то она автоматически будет оптимальной и для другого игрока. В следующем примере рассматривается такая симметричная задача.

Пусть перед двумя воюющими сторонами стоит цель захватить один и тот же пункт; при этом каждая сторона, независимо от другой, определяет момент своей попытки овладеть этим пунктом. Пусть значение некоторой известной функции $\varphi(t)$ представляет собой вероятность того, что та или другая сторона овладеет этим пунктом, если она начнет свою операцию в момент t . Предполагается, что функция $\varphi(t)$ возрастает от нуля до своей максимальной величины, которая достигается при $t=0$, а затем, после этого наиболее выгодного момента, убывает. Чем раньше каждый из конкурентов начнет свои действия, тем больше у него шансов опередить своего противника, но тем меньше у него шансов достичь успеха при своей попытке.

⟨Предполагается, что если один из противников овладел пунктом, то другой уже этого сделать не может.⟩

В рассматриваемом сейчас варианте задач подобного рода каждая сторона имеет возможность действовать только один раз и совсем не получает информации о том, не предпринял ли уже ее противник аналогичную попытку.

Итак, чистые стратегии противников представляют собой моменты времени, в которые они решаются действовать. Как обычно, обозначим эти стратегии через x и y и предположим, что x и y — любые действительные числа, удовлетворяющие ограничению $x \leq 0$, $y \leq 0$ (это ограничение означает, что ни один из противников не имеет оснований действовать после наиболее выгодного момента $t=0$).

Смешанные стратегии выражаются в общем случае функциями распределения $P(x)$, $Q(y)$; однако в нашем примере достаточно ограничиться рассмотрением смешанных стратегий, заданных плотностями вероятности $p(x)$ и $q(x)$. Наконец, в силу симметрии задачи нам достаточно лишь одной функции $p(x)$.

Мы приведем сначала решение задачи, а затем поясним, как оно может быть получено. Оптимальная стратегия задается следующей плотностью вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ \frac{\varphi(0) \cdot \varphi'(x)}{2\varphi^3(x) [1 + \varphi(0)]} & \text{при } a \leq x \leq 0, \end{cases}$$

где постоянная a есть отрицательное число, определяемое с помощью уравнения

$$\varphi(a) = \frac{\varphi(0)}{1 + 2\varphi(0)}.$$

Это решение выражает в точной количественной форме интуитивное представление об оптимальной схеме поведения противника. Никто из них не предпринимает никаких действий до тех пор, пока шанс на успех не превзойдет некоторой пороговой величины a , определяемой приведенной выше формулой. Плотность вероятности, с помощью которой каждый из противников принимает свое решение, оказывается большой, если функция $\varphi(t)$ возрастает быстро.

Первый шаг для получения только что приведенного результата состоит в том, чтобы установить, какая функция $f(x, y)$ выражает на математическом языке ситуацию, которую мы сейчас рассматриваем. Если первый из противников действует раньше второго, т. е. если $x < y$, то шанс первого противника достичь своей цели равен $\varphi(x)$; вероятность того же события для его конкурента равна (произведению вероятностей двух событий. Одно из них состоит в том, что первый противник, начавший действовать раньше, цели не достиг: вероятность такого события равна $1 - \varphi(x)$ ¹⁾). Второе событие состоит в том, что второй противник, начиная операцию в момент y , достигает цели. Вероятность этого события равна $\varphi(y)$. Таким образом, вероятность достижения цели вторым противником при $x < 0$ равна

$$[1 - \varphi(x)]\varphi(y).$$

<В качестве функции $f(x, y)$ можно выбрать разность между вероятностью успеха первого и второго противников; > таким образом, для $x < y$

$$f(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y)[1 - \varphi(x)] = \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Если оба противника действуют одновременно, то $f(x, y) = 0$, так как каждый имеет одинаковый шанс на успех. Наконец, если $x > 0$, то

$$f(x, y) = \varphi(x)[1 - \varphi(y)] - \varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Итак, функция $f(x)$ задается в виде

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(x) \cdot \varphi(y) & \text{при } x < y, \\ 0 & \text{» } x = y, \\ \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x) \cdot \varphi(y) & \text{» } x > y. \end{cases}$$

Смешанная стратегия $p(x)$ является оптимальной, если для каждого y

$$F(p, y) = \int_{-\infty}^0 f(x, y) \cdot p(x) dx \geq 0.$$

Разобьем интервал интегрирования на две части: от $-\infty$ до y ($x < y$) и от y до 0 ($x > y$), затем подставим в полученные таким

¹⁾ См. Добавление, п. 2.

образом два интеграла значения функции $f(x, y)$, определенные написанными выше формулами. Получим ¹⁾:

$$2 \int_{-\infty}^y \varphi(x) p(x) dx \geq C \left(1 - \frac{1}{\varphi(y)} \right) + 1.$$

Общий принцип, высказанный в конце п. 5, обобщенный на непрерывный случай, сводится к требованию, чтобы в полученном соотношении равенство выполнялось для каждого y , для которого $p(y)$ отлично от нуля. Исключая случай $p(y) \equiv 0$, естественно предположить, что $p(x)$ обращается в нуль при $x < a$, а при $x > a$ определяется условием

$$2 \int_a^y \varphi(x) p(x) dx = C \left(1 - \frac{1}{\varphi(y)} \right) + 1.$$

Такое предположение мы и сделаем. Написанное равенство, пролиференцированное по y , приводит к формуле:

$$p(y) = \frac{C}{2} \varphi'(y) \varphi^{-3}(y).$$

$$\begin{aligned} & 1) \quad F(p, y) = \\ & = \int_{-\infty}^y p(x) [\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(x) \cdot \varphi(y)] dx + \int_y^0 p(x) \cdot [\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x) \cdot \varphi(y)] dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 p(x) \varphi(x) dx - \varphi(y) \int_{-\infty}^0 p(x) dx + \\ & + \varphi(y) \int_{-\infty}^y x(x) p(x) dx - \varphi(y) \int_y^0 x(x) p(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Замечая, что $\int_{-\infty}^0 p(x) dx = 1$ и добавляя к обеим частям неравенства выражение $\varphi(y) \int_{-\infty}^y \varphi(x) p(x) dx$, получим:

$$C - \varphi(y) + 2 \varphi(y) \int_{-\infty}^y \varphi(x) p(x) dx \geq \varphi(y) \cdot C,$$

где $C = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) p(x) dx$. Разделив на $\varphi(y)$, получим формулу в тексте.
(Прим. перев.)

Кроме того, должны выполняться соотношения

$$\int p(x) dx = 1 \quad \text{и} \quad \int \varphi(x) p(x) dx = C.$$

Первое из дополнительных соотношений определяет значение числа a , где возникает скачок, а второе соотношение определяет величину постоянной C^1).

В заключение следует, конечно, проверить, что полученное таким способом решение действительно удовлетворяет условию: $F(p, y)$ больше нуля при всяком y . Эти детали мы опустим.

Приведенный пример представляет собой частный случай широкого класса хорошо изученных задач, носящих название «дуэли»²).

Вопрос об отыскании оптимальной смешанной стратегии сводится к решению линейных интегральных уравнений. Можно показать также, что эти задачи имеют единственное решение, т. е. что для каждого из противников существует лишь одна смешанная стратегия, наилучшим образом выражающая его интересы.

Единственность решений имеет место для всех «дуэлей», а также для некоторых других случаев. Однако имеются случаи, когда единственность не имеет места. Может оказаться, что для одной стороны имеется несколько оптимальных смешанных стратегий.

7. Соотношение $\max\text{-}\min = \min\text{-}\max$

Из предыдущего ясно, что теория игр с двумя участниками и нулевой суммой базируется на соотношении $\max\text{-}\min = \min\text{-}\max$. Оптимальная чистая стратегия существует именно в том исключительном случае, когда это соотношение выполняется для функции $f(x, y)$. Для функции $F(p, q)$ оно большей частью выполняется и дает возможность выбрать оптимальное поведение. Мы указывали, наконец,

$$^1) \text{ Именно, полагая } \frac{C}{2} \int_a^0 \varphi'(x) \varphi^{-2}(x) dx = 1, \quad \text{получим } \frac{C}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(0)} \varphi^{-2} d\varphi = 1,$$

$$\text{откуда } C = \frac{4}{\varphi^{-2}(a) - \varphi^{-2}(0)}. \quad \text{Далее, полагая } \frac{C}{2} \int_a^0 \varphi'(x) \varphi^{-2}(x) dx = C, \quad \text{полу-}$$

$$\text{чим } 2 = \frac{1}{\varphi(a)} - \frac{1}{\varphi(0)}, \quad \text{откуда } \varphi(a) = \frac{\varphi(0)}{1 + 2\varphi(0)}. \quad \text{Подставляя это значение}$$

$$\text{в выражение для } C, \quad \text{получим } C = \frac{\varphi(0)}{\varphi(0) + 1} \quad \text{и}$$

$$p(x) = \frac{\varphi(0)}{2[\varphi(0) + 1]} \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi^{-2}(x)} \quad \text{при } x \geq a. \quad (\text{Прим. перев.})$$

²) «Index of Publication», The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., февраль 1954, стр. 14.

на тот факт, что соотношение $\max\text{-}\min = \min\text{-}\max$ выполняется во всяком случае, если каждый из участников игры располагает конечным числом чистых стратегий. Доказательство этого факта для широкого класса функций базируется на двух особенностях функции $F(p, q)$. Одна из этих особенностей связана с природой смешанных стратегий p, q , другая — со специальной формой функции $F(p, q)$.

Если число чистых стратегий конечно, то, по определению, смешанная стратегия p представляет собой систему (p_1, p_2, \dots, p_m) , состоящую из m неотрицательных чисел, сумма которых равна единице.

Этот факт приводит к простой геометрической интерпретации смешанных стратегий. Пусть $m=3$; рассмотрим треугольник, каждая точка которого (лежащая на границе или внутри треугольника) может быть представлена как центр тяжести точечных масс, помещенных в его вершинах. Так как положение центра тяжести зависит только от отношения этих масс, то мы можем положить их сумму равной единице. отождествление p_1, p_2, p_3 с этими массами приводит к отождествлению смешанной стратегии с центром тяжести этих масс. Другими словами, смешанные стратегии можно рассматривать как точки, лежащие внутри треугольника или на его границе. Чистым стратегиям соответствуют вершины треугольника.

Для других значений m конструкция изменяется очевидным образом. При $m=2$ смешанные стратегии представляют собой точки отрезка прямой, при $m=4$ смешанные стратегии являются точками тетраэдра. Для более высоких значений m смешанные стратегии заполняют в пространстве $m-1$ измерений фигуру, аналогичную тетраэдру (так называемый *симплекс*). Все полученные таким образом фигуры являются *выпуклыми*. Это значит, что вместе с каждой парой точек такой фигуры принадлежит целиком и весь отрезок, соединяющий эти точки.

Перейдем к свойству функции $F(p, q)$, связанному непосредственно с ее формой. В случае, когда число чистых стратегий конечно, функция $F(p, q)$ задается в виде суммы (см. п. 5). Эта сумма представляет собой билинейную форму от p и q . Это означает, что для каждого q функция $F(p, q)$ линейна относительно p и наоборот. В частности, если p и q представляют собой две смешанные стратегии, то

$$F\left(\frac{p' + p''}{2}, q\right) = \frac{F(p', q) + F(p'', q)}{2}.$$

Если в этом соотношении заменить знак равенства знаком \leq , то полученное условие определит обширный класс функций, называемых *функциями, выпуклыми относительно p* . Точно так же, если знак равенства заменить на \geq , то мы придем к определению *вогнутых функций*.

Основной результат теории состоит в том, что *если каждое из независимых переменных p и q принадлежит к некоторой выпуклой фигуре конечномерного пространства и если функция $F(p, q)$*

вогнута относительно p при всяком q и выпукла относительно q при всяком p , то

$$\max_p [\min_q F(p, q)] = \min_q [\max_p F(p, q)].$$

(Предполагается, что выпуклые фигуры, являющиеся областью изменения p и q , включают и свои граничные точки; кроме того, предполагается, что они расположены в конечной части пространства. Без таких предположений и максимум и минимум могут и не существовать.)

Эти требования можно уменьшить; в некоторых случаях функция $F(p, q)$ имеет форму дроби с положительным знаменателем. Основное отношение $\max\text{-}\min = \min\text{-}\max$ остается справедливым соответственно при выпуклости и вогнутости числителя и знаменателя; для этого достаточно, в частности, чтобы каждый из них был билинейным. Этот более общий вариант основного результата будет использован в примере п. 8.

Получено также обобщение этих результатов на бесконечномерный случай. Это обобщение играет важную роль при изучении игр с бесконечным множеством чистых стратегий. Однако в этих случаях могут оказаться полезными и результаты конечномерного варианта. Примером этого является задача о нападении и защите, рассмотренная в п. 4. В этом примере сами чистые стратегии образуют выпуклые фигуры, и функция $f(x, y)$ оказывается выпуклой относительно y при любом x . Общие положения теории гарантируют, что в таком случае второй игрок располагает оптимальной чистой стратегией. Этот факт с успехом применяется для определения оптимальной схемы поведения.

Другая возможность использования конечномерного варианта основной теоремы для бесконечномерного случая возникает, если чистые стратегии x и y изменяются, скажем, в интервале от 0 до 1, а функция $f(x, y)$ представляет собой многочлен¹⁾:

$$f(x, y) = \sum c_{ik} x^i y^k.$$

Пусть смешанные стратегии выражены функциями распределения $P(x)$, $Q(x)$; тогда функция $F(p, q)$ имеет вид

$$F(p, q) = \sum c_{ik} \int x^i dP \int y^k dQ.$$

Задача свелась к конечномерному случаю, так как смешанные стратегии могут быть полностью описаны конечным числом так называемых моментов $\int x^i dP$ и $\int y^k dQ$. На этом пути возникает интересная связь между теорией игр и теорией моментов.

¹⁾ M. Dresher, S. Karlin and L. S. Shapley, Polynomial Games, Contributions to the Theory of Games, Ann. Math. Stud. 24, 1950, 161—180.

8. Приложение к экономике

Методы или результаты теории игр могут быть часто использованы при изучении моделей экономических ситуаций. Рассмотрим в качестве примера модель стабильно развивающейся экономики. Связь этой модели с теорией игр была обнаружена Нейманом¹⁾.

Предполагается, что «экономика» представляет собой замкнутую систему, содержащую n продуктов и m процессов производства. Продукты обозначаются целыми числами j ($1 \leq j \leq n$), а процессы производства — целыми числами i ($1 \leq i \leq m$). В каждом процессе одни из продуктов, принадлежащих к рассматриваемой системе, используются, а другие — производятся. Предполагается, что для измерения количества продуктов и интенсивности производства выбраны подходящие единицы. Для каждого i -го процесса производства числа

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$$

выражают количества различных продуктов, которые используются в этом процессе, когда он ведется с единичной интенсивностью, а числа

$$b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}$$

— соответственно количества продуктов, произведенных в этом процессе. Относительные интенсивности процессов производства мы будем обозначать через

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)},$$

а относительные цены различных продуктов j — через

$$y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}.$$

Числа x и y являются неотрицательными, причем их суммы равны единице. Предположение о *стабильности экономической системы* означает, что эти числа должны быть постоянными. Предположение о *развивающейся экономике* можно интерпретировать, полагая, что по истечении каждой единицы времени интенсивности процессов производства умножаются на один и тот же коэффициент $\xi > 1$.

Для каждого продукта j должно выполняться неравенство

$$\sum_i b_{ij} x_i^{(0)} \geq \xi \sum_i a_{ij} x_i^{(0)},$$

так как в противном случае потребности развивающейся экономики превосходили бы фактические запасы. Кроме того, если для некоторого продукта j в предыдущем соотношении имеет место знак неравенства, то образуется излишек, который в стабильной экономике с необходимостью влечет за собой обращение в нуль относительной

¹⁾ J. von. Neumann, A Model of General Economic Equilibrium, Rev. Econ. Stud. 13, стр. 1—9, 1945—1946 (перевод на англ. язык с рукописи Неймана).

цены этого продукта. Эти два условия могут быть заменены требованием, чтобы для любого возможного распределения цен

$$\sum_{ij} b_{ij} x_i^{(0)} y_j \geq \xi \sum_{ij} a_{ij} x_i^{(0)} y_j,$$

причем знак равенства должен достигаться при фактических относительных ценах $y_j^{(0)}$.

Законы этой «экономики» предписывают далее, чтобы конкуренция приводила к уменьшению прибылей. Если мы обозначим через η число $1 + p$, где p — норма прибыли, то для каждого процесса производства должно выполняться соотношение

$$\sum_j b_{ij} y_j^{(0)} \leq \eta \sum_j a_{ij} y_j^{(0)}.$$

Если для некоторого процесса производства i сохраняется строгое неравенство, то $x_i^{(0)} = 0$. Эти два условия могут быть выражены и по-другому: для каждой допустимой системы интенсивностей x_i

$$\sum_{ij} b_{ij} y_j^{(0)} x_i \leq \eta \sum_{ij} a_{ij} y_j^{(0)} x_i,$$

причем знак равенства достигается при действительных интенсивностях $x_i^{(0)}$.

Мы сделаем теперь предположение, что все a_{ij} положительны. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{\sum b_{ij} x_i y_j}{\sum a_{ij} x_i y_j}.$$

Суммы в числителе и знаменателе распространены по всем i и j . Установленные выше условия могут быть выражены с помощью этой функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &\leq \min_y f(x^{(0)}, y), \quad \xi = f(x^{(0)}, y^{(0)}); \\ \eta &\geq \max_x f(x, y^{(0)}), \quad \eta = f(x^{(0)}, y^{(0)}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, во-первых, что $\xi = \eta$ и, во-вторых, что

$$\begin{aligned} \xi &= \min_y f(x^{(0)}, y) = \max_x [\min_y f(x, y)] = \\ &= \min_y [\max_x f(x, y)] = \max_x f(x, y^{(0)}) = \eta. \end{aligned}$$

Полученный результат устанавливает связь между рассмотренной экономической моделью и основной теоремой, о которой мы говорили в п. 7. Так как функция $f(x, y)$ представляет собой отношение двух билинейных форм, то мы находимся в условиях применения этой основной

теоремы и можем, следовательно, высказать следующее утверждение: для заданных систем a_{ij} и b_{ij} существует по крайней мере одна развивающаяся «экономика», использующая эти параметры и в которой общее значение $\max\text{-min}$ и $\min\text{-max}$ функции f больше единицы. Это общее значение представляет собой коэффициент ξ , характеризующий расширение производства и равный также коэффициенту $\eta = 1 + p$, характеризующему норму прибыли.

Предположение $a_{ij} > 0$ для всех i и j обеспечивает положительность суммы $\sum a_{ij}x_iy_j$ и, следовательно, делает возможным деление возникших выше неравенств на эту сумму. Это ограничение довольно стеснительно; оно может быть ослаблено, если вместо функции $f(x, y)$ рассматривать функцию

$$g(x, y) = \frac{\sum b_{ij}x_iy_j}{\sum (a_{ij} + b_{ij})x_iy_j}$$

и предполагать теперь, что $a_{ij} + b_{ij} > 0$. Естественно предполагать, конечно, имея в виду природу нашей задачи, что $a_{ij} \geq 0$ и $b_{ij} \geq 0$, но, к сожалению, необходимо делать дополнительное предположение, что сумма $a_{ij} + b_{ij}$ строго положительна для всех i и j . Если снять это ограничение, то соотношение $\xi = \eta$ может перестать выполняться.

9. Последовательные приближения

Фактически определение оптимальной смешанной стратегии было сделано нами пока лишь в п. п. 5 и 6. В настоящее время для вычисления смешанных стратегий разработано много разнообразных методов, основанных на самых различных принципах, начиная от простых геометрических соображений и кончая использованием сложных фактов из теории линейных операторов.

Если оба участника игры располагают одним и тем же конечным числом чистых стратегий и если, кроме того, у каждого из них имеется оптимальная смешанная стратегия, при которой вероятности, соответствующие любой чистой стратегии, отличны от нуля, то, как было показано в п. 5, неравенства, определяющие оптимальную стратегию, могут быть заменены уравнениями. Задача сводится, таким образом, к решению системы линейных уравнений.

Этот способ может быть приспособлен и к общему случаю игр с конечным числом чистых стратегий. В этом случае разграфленный прямоугольник, характеризующий игру, может быть сведен к квадрату путем вычеркивания некоторых подходящих строк и столбцов. Полученный таким образом квадрат называется *существенной частью* исходного прямоугольника, и к нему может быть применен описанный выше метод. К сожалению, с увеличением числа чистых стратегий операция выделения существенной части исходного прямоугольника становится затруднительной, и метод перестает быть эффективным.

Браун разработал метод последовательных приближений¹⁾, который успешно применяется в тех случаях, когда переход к существенной части исходного прямоугольника не может быть осуществлен. Этот метод состоит в том, что для каждого участника игры строятся последовательности $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}, \dots$ и $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r)}, \dots$ смешанных стратегий, сходящиеся соответственно к оптимальным смешанным стратегиям p и q . Метод особенно удобен для вычислений, так как его легко программировать для электронных цифровых машин. К сожалению, сходимость этого метода (доказанная Джулией Робинсон²⁾) — весьма медленная. Последовательности $p^{(r)}$ и $q^{(r)}$ строятся с помощью рекуррентного процесса. Пусть задана смешанная стратегия q для второго участника. Обозначим через $\varphi(q)$ чистую стратегию первого игрока, оптимальную для парирования заданной смешанной стратегии q . Аналогичным образом определяется чистая стратегия второго игрока $\psi(p)$, когда задана смешанная стратегия p первого игрока. Отправляясь от произвольной стратегии $q^{(1)}$, полагаем $p^{(1)} = \varphi(q^{(1)})$. Члены последовательности $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ определяются одновременно. Если $q^{(r)}$ и $p^{(r)}$ уже найдены, то следующая пара $q^{(r+1)}, p^{(r+1)}$ определяется соотношениями:

$$q^{(r+1)} = \frac{r-1}{r} q^{(r)} + \frac{1}{r} \psi(p^{(r)}), \quad p^{(r+1)} = \frac{r-1}{r} p^{(r)} + \frac{1}{r} \varphi(q^{(r+1)}).$$

<Читателю рекомендуется вычислить несколько приближений к наилучшим смешанным стратегиям для игры, рассмотренной в примере на стр. 80, и оценить их близость к найденным в этом примере точным значениям $p = \frac{4}{5}$ и $q = \frac{2}{5}$.>

К описанному методу тесно примыкает метод, найденный независимо друг от друга Брауном и Нейманом. В этом последнем методе оптимальные стратегии получаются как предел решения некоторой системы дифференциальных уравнений, когда независимое переменное стремится к бесконечности.

10. Общее понятие стратегии — игра типа покера

Все примеры, с которыми мы имели дело, определяли собой частный случай общей модели, описанной в п. 2. В некоторых случаях, однако, приходится рассматривать ситуации, имеющие более общую форму. Оба участника игры могут принимать не одно, а несколько последовательных решений. Кроме того, некоторые ходы могут иметь чисто случайный характер. К тому моменту, когда должно быть принято решение об очередном ходе, результаты предыдущих ходов, ответы

¹⁾ G. W. Brown, Notes on the Solution of Linear Involving Inequalities, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1951.

²⁾ Julia Robinson, An Iterative Method of Solving a Game, New York, 1952.

противника или случайные ходы могут быть частично известны участнику игры.

Наибольшая трудность состоит в том, чтобы аккуратно описать случаи, охватываемые теорией, и приписать точный смысл понятию чистой стратегии. Мы сосредоточим наше внимание на случае, когда общее число ходов и возможных направлений игры конечно. Чистая стратегия отождествляется с системой инструкций, которая, подобно хорошо составленному завещанию, предусматривает все возможные случаи и может информировать любого непосвященного о том, какие действия следует предпринять. Общее число чистых стратегий конечно.

Представим себе, что каждый участник игры имеет полный список своих чистых стратегий, сброшированный в книгу, на каждой странице которой помещена одна стратегия. Пусть, далее, каждый игрок может передавать свои возможности посреднику. Для этой цели он сообщает последнему номер страницы, где записана чистая стратегия, которую он намерен применить. Следуя полученной от обоих игроков инструкции, посредник может уже действовать, больше не обращаясь к ним. Заметим, что эта игра сводится к описанной ранее модели: каждый игрок выбирает число (именно — номер страницы) в полном неведении относительно соответствующего действия своего противника.

Приведем пример, который может помочь уяснить себе это понятие о чистой стратегии. Рассмотрим игру с двумя участниками и нулевой суммой, представляющую собой упрощенный вариант покера, сохраняющий важную особенность этой игры — возможность «блефовать» (т. е. играть на повышение и рассчитывать на выигрыш даже при плохих картах).

Наша упрощенная игра состоит из шести ходов: $\langle a, b, c, d, e, f \rangle$. При ходах a и b оба игрока действуют независимо друг от друга, ходы c, d, e и f делаются поочередно, начиная с первого игрока. Игра может закончиться на любом из ходов c, d, e или f .

Игроки имеют дело с колодой игральных карт, в которой различаются лишь два типа карт — «старшие» и «младшие» (например, старшими могут быть объявлены карты красной масти, а младшими — карты черной масти).

Перечислим содержание каждого из ходов игры.

Ход a) Каждый игрок уплачивает вступительный взнос, равный 2 единицам.

Ход b) Каждый игрок вытаскивает из колоды независимо друг от друга карту, которая может оказаться старшей или младшей. Этот ход является *случайным*. Предполагается, что оба игрока имеют независимые и одинаковые шансы получить старшую или младшую карту. Каждый игрок видит свою карту, но не видит карты противника.

Ход c) Первый игрок может пасовать или увеличить свою ставку на 3 единицы. (Таким образом, после хода «с» он внесет всего 5 единиц.)

Ход d) Второй игрок может либо пасовать, либо потребовать открыть карты, либо поднять ставку на 3 единицы (против ставки первого игрока, т. е. внести 6 единиц; всего им будет внесено 8 единиц).

Ход е) Первый игрок может либо пасовать, либо потребовать открыть карты, либо поднять ставку еще на 3 единицы (т. е. внести 6 единиц; после этого хода его общий взнос достигнет 11 единиц).

Ход f) Второй игрок может либо пасовать, либо потребовать открыть карты.

Игра продолжается до того момента, пока какой-нибудь игрок не спасует или не потребует открыть карты. В последнем случае карты игроков сравниваются. Выигрывает старшая карта. Если карты равноценны, то каждый игрок забирает обратно всю внесенную им ставку. В случае, если игрок пасует, то его ставка полностью достается противнику (это правило действует и при ходе «с»; в этом случае второй игрок получает вступительный взнос).

Чтобы уменьшить общее число стратегий, можно принять следующее соглашение. Игрок, обладающий старшей картой, автоматически поднимает ставку до тех пор, пока при ходе f он не должен будет открыть карты. При таком условии чистая стратегия является инструкцией только для случая, когда игрок получил младшую карту.

Первый игрок располагает четырьмя чистыми стратегиями:

I_1 : пасовать при ходе с,

I_2 : увеличить ставку при ходе с, но пасовать при ходе е,

I_3 : увеличить ставку при ходе с, но требовать открыть карты при ходе е,

I_4 : увеличить ставку и при ходе с и при ходе е.

Оказывается, что и второй игрок также имеет четыре чистые стратегии:

II_1 : пасовать при ходе d,

II_2 : открывать карты при ходе d,

II_3 : увеличить ставку при ходе d, но пасовать при ходе f,

II_4 : увеличить ставку при ходе d и открывать карты при ходе f.

Разграфленный на ячейки прямоугольник, соответствующий этой игре, изображен на рис. 3. Такой прямоугольник

	II_1	II_2	II_3	II_4
I_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{7}{4}$
I_2	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
I_3	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
I_4	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0

Рис. 3.

называется *матрицей выигрышей*. (Роль функции $f(x, y)$ играет здесь математическое ожидание выигрыша при условии, что будут применены стратегии x и y .)

Покажем, как подсчитать элементы этой матрицы. Рассмотрим, например, как получено число $-\frac{7}{4}$, находящееся в ее нижнем левом углу.

Первый игрок применяет свою четвертую стратегию, т. е. он поднимает ставку всякий раз, как ему представится такая возможность.

Второй игрок применяет свою первую стратегию, т. е. пасует при четвертом ходе.

Если оба игрока получают старшую карту, то выигрыш равен нулю.

Если у первого игрока оказалась старшая карта, а у второго — младшая, то первый игрок забирает ставку второго, равную 2 единицам.

Если первый игрок получил младшую карту, а второй — старшую, то первый теряет свой вступительный взнос и три ставки — всего 11 единиц.

Наконец, если у обоих игроков карты оказались одинаковыми, то первый игрок забирает себе вступительную ставку второго игрока, равную 2 единицам.

Каждый из этих четырех исходов имеет вероятность $\frac{1}{4}$. Таким образом, математическое ожидание выигрыша 1-го игрока равно $\frac{1}{4} \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} - 11 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$.

Решение этой игры, т. е. определение смешанных стратегий, может быть легко найдено. Приведем результат:

Для первого игрока: Использование I_1 с вероятностью $\frac{1}{7}$, II_2 с вероятностью $\frac{6}{7}$, I_2 и I_4 с вероятностью 0.

Для второго игрока: Использование II_1 с вероятностью $\frac{6}{7}$, II_2 с вероятностью $\frac{1}{7}$, II_3 и III_4 с вероятностью 0.

Игра выгодна для второго игрока, который может надеяться на средний выигрыш в $\frac{2}{7}$ в каждой партии.

11. Заключение

В этой статье мы затронули лишь случай игры с двумя участниками и нулевой суммой. В настоящее время разрабатываются и другие случаи.

В общем случае возможности образования коалиций между участниками и следствия этих коалиций изучены Нейманом. Интуитивно ясно (и примеры подтверждают это), что во многих случаях при объединении игроков в команду каждый из членов такой команды может выиграть больше, чем если бы он действовал индивидуально.

Эта выгода является следствием соглашения, по которому отдельный игрок совершает иногда ходы, невыгодные непосредственно для него, но выгодные для команды в целом. Это соглашение состоит в том, что выигрыши отдельных членов команды после игры объединяются и перераспределяются между ними в соответствии с заранее выработанными правилами. Эти правила должны быть составлены так, чтобы у членов команды не возникало стимула бросить команду и сговориться с противником в целях собственной выгоды.

В настоящее время теория может исследовать лишь устойчивость образованных коалиций, но еще не решает вопроса о наилучших способах их организации. Разрешение этой последней задачи имело бы большое значение для экономики.

Детали результатов Неймана можно прочесть в уже цитированных книгах, в частности в книге Неймана и Моргенштерна, указанной на стр. 55.

Случай, когда внешние причины мешают созданию коалиций, является с теоретической точки зрения наиболее сложным. Некоторые частные задачи решены, но удовлетворительной общей формулировки до сих пор не имеется.

Добавление

Некоторые понятия и формулы из теории вероятностей¹⁾

1. Случайное событие A связывается обычно с некоторым опытом α , при каждой реализации которого событие либо происходит, либо нет.

Пусть опыт α воспроизводится n раз. *Частотой события A* в серии из n опытов называется число

$$f_n = \frac{m}{n},$$

где m — количество опытов α , при реализации которых событие A имело место ($0 \leq m \leq n$).

Основной экспериментальный факт, позволяющий теоретически изучать случайные события, встречающиеся в естествознании и практической жизни, состоит в том, что для событий такого рода частоты f_n с увеличением числа n опытов всё реже и реже отклоняются от некоторой константы. Проведя достаточно большую серию опытов и выписывая частоты f_n для различных n , можно для каждого случайного события эту константу фактически указать (разумеется, с известной неоднозначностью, так же как с известной неоднозначностью снимают показания со стрелочного прибора, приписывают определенную температуру точке поверхности тела и т. п.).

Итак, каждому случайному событию A можно приписать достаточно устойчивую числовую характеристику — частоту, описывающую свойства события A при *массовых испытаниях*. Соответствие между событиями и их частотами в теории вероятностей аксиоматизируется. Каждому событию A ставится в соответствие число $P(A)$ — его *вероятность*. Экспериментальный способ измерения вероятности состоит в определении частоты события A в достаточно большом числе опытов.

Теория вероятностей базируется на системе аксиом, выбранных так, чтобы сохранить в математической теории важнейшие свойства экспериментальных частот. В настоящее время предложено несколько систем аксиом, которые могут быть положены в основу построения теории вероятностей.

2. Приведем несколько основных формул для вероятностей событий²⁾.

Вероятность события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1)$$

¹⁾ Мы ограничиваемся лишь кратким изложением сведений, прямо или косвенно связанных с текстом статьи. За точными определениями и доказательствами читателю следует обратиться к литературе, например, Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М., 1954; Н. Арлей, К. Бух, Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, М., 1951.

²⁾ В зависимости от того, какая именно из систем аксиом принимается, та или другая часть этих формул либо содержится в числе аксиом, либо является следствиями из них.

Вероятность *достоверного* события U равна 1; вероятность *невозможного* события V равна нулю:

$$P(U) = 1; P(V) = 0. \quad (2)$$

Суммой $A_1 + A_2$ двух событий A_1 и A_2 называется событие, состоящее в том, что происходит по крайней мере одно из событий A_1 или A_2 . Произведением $A_1 A_2$ двух событий называется событие, состоящее в том, что осуществятся оба события A_1 и A_2 .

Если события A и B *независимы*, т. е. если вероятность события A не изменяется, когда известно, что имело место событие B и наоборот, то верна формула

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (3)$$

Если события A и B *несовместимы*, т. е. если $P(AB) = 0$, то имеет место соотношение

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (4)$$

Событие, состоящее в *ненаступлении* A , называется *противоположным* событию A и обозначается \bar{A} . A и \bar{A} несовместимы. Кроме того, $A + \bar{A}$ есть достоверное событие (« A либо наступает, либо не наступает»). Таким образом, из (2) и (4) получаем

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (5)$$

3. Пусть в результате опыта α с необходимостью появляется одно из событий A_i ($1 \leq i \leq n$), причем $P(A_i A_k) = 0$ ($i \neq k$). Если событие A_i состоит в появлении некоторого числа x_i , то говорят, что опыт α имеет своим исходом появление *случайной величины* ξ , принимающей значения x_1, x_2, \dots, x_n .

Аналогичным образом вводится *двумерная случайная величина* (ξ, η) , значениями которой являются пары чисел (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$).

Для вероятностной характеристики случайной величины должны быть указаны вероятности, с которыми могут появляться ее значения. Для случайной величины ξ должны быть указаны n чисел p_1, p_2, \dots, p_n , где p_i — вероятность того, что случайная величина примет значение x_i . В силу того, что какое-то из этих значений обязательно появляется,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (6)$$

Если все значения случайной величины равновероятны, то из (6) следует:

$$p_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Двумерная случайная величина характеризуется nm вероятностями p_{ij} , с которыми принимаются значения (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$).

При этом

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1. \quad (7)$$

Функцией от случайной величины $f(\xi)$ называется случайная величина, принимающая значения $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Математическим ожиданием функции $f(\xi)$ называется число $\bar{f}(\xi)$, определяемое формулой

$$\bar{f}(\xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i) p_i. \quad (8)$$

Математическим ожиданием функции $f(\xi, \eta)$ от двумерной случайной величины называется число $\overline{f(\xi, \eta)}$:

$$\overline{f(\xi, \eta)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) p_{ij}. \quad (9)$$

Если случайные величины ξ и η *независимы*, т. е. независимо от значения η величина ξ принимает значения x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n , а величина η независимо от значений ξ принимает значения y_1, y_2, \dots, y_m с вероятностями q_1, q_2, \dots, q_m , то в силу (3) $p_{ij} = p_i q_j$ и

$$\overline{f(\xi, \eta)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) p_i q_j. \quad (10)$$

Именно эта формула и играет основную роль в теории смешанных стратегий, так как чистые стратегии x и y выбираются противниками независимо друг от друга.

Наряду с рассмотренными только что *дискретными* случайными величинами, принимающими изолированные значения, теория вероятностей изучает *непрерывные* случайные величины, принимающие любые значения из конечных или бесконечных интервалов или (в двумерном случае) из областей на плоскости.

Вероятностной характеристикой непрерывных случайных величин является *плотность распределения*. Для одномерной непрерывной случайной величины плотность $p(x)$ определяется соотношением:

$$P\{x \leq \xi < x + dx\} = p(x) dx + o(dx), \quad (11)$$

где $P\{x \leq \xi < x + dx\}$ — вероятность того, что случайная величина попадает в интервал $(x, x + dx)$; $o(dx)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем dx .

Из (11) следует, что вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (λ_1, λ_2) выражается формулой

$$P\{\lambda_1 < \xi < \lambda_2\} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(x) dx. \quad (12)$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1^1). \quad (13)$$

Двумерная случайная величина характеризуется плотностью $p(x, y)$:

$$P\{x < \xi < x + dx, y < \eta < y + dy\} = p(x, y) dx dy + o(\sqrt{dx^2 + dy^2}). \quad (14)$$

Вероятность $p(G)$ попадания случайной величины (ξ, η) в некоторую область G плоскости x, y выражается формулой

$$p(G) = \iint_{(G)} p(x, y) dx dy. \quad (15)$$

¹⁾ Мы пишем бесконечные пределы у интеграла (а не границы интервала возможных значений случайной величины), считая, что вне этого интервала $p(x)$ обращается в нуль.

В частности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1. \quad (16)$$

Математическое ожидание функции $f(\xi)$ от непрерывной случайной величины ξ определяется формулой

$$\overline{f(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x) dx. \quad (17)$$

В двумерном случае формула для математического ожидания $f(\xi, \eta)$ приобретает вид

$$\overline{f(\xi, \eta)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (18)$$

Если ξ и η — независимые случайные величины с плотностями $p(x)$ и $q(y)$ соответственно, то, как нетрудно показать, $p(x, y) = p(x) \cdot q(y)$ и, аналогично формуле (9),

$$\overline{f(\xi, \eta)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) q(y) f(x, y) dx dy. \quad (19)$$

И дискретные, и непрерывные случайные величины могут быть описаны единым образом, если пользоваться функциями распределения. Для одномерной случайной величины ξ функция распределения $P(x)$ определяется равенством

$$P(x) = P(-\infty < \xi \leq x). \quad (20)$$

Если ξ — непрерывная случайная величина, то, очевидно,

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(z) dz \quad \text{и} \quad \frac{dP}{dx} = p(x). \quad (21)$$

В общем случае $P(x)$ может быть и недифференцируемой функцией и формулы (8) и (17) могут быть заменены более общим выражением

$$\overline{f(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dP(x),$$

где интеграл в правой части — так называемый *интеграл Стильтьеса*.¹⁾ Формулы (9) и (19) в общем случае приобретают вид

$$\overline{f(\xi, \eta)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dP(x) dQ(y),$$

где справа стоит кратный интеграл Стильтьеса.

¹⁾ См. Х. Гохман, Интеграл Стильтьеса и его приложения, М., 1958.

4. Практическое значение понятия математического ожидания функции от случайной величины определяется следующим предложением. Пусть в результате серии из N опытов получено N значений функции f от одномерной или двумерной случайной величины: f_1, f_2, \dots, f_N . При достаточно широких условиях можно доказать следующее предложение: *вероятность отклонения среднего арифметического $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$ от математического ожидания \bar{f} более чем на ϵ , где ϵ — любое, сколь угодно малое положительное число, стремится к нулю с ростом числа N :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \bar{f} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right| > \epsilon \right\} = 0.$$

Таким образом, для достаточно больших серий испытаний среднее значение функции f весьма редко существенно отклоняется от ее математического ожидания \bar{f} .

*Перев. с английского (с примечаниями, дополнениями и добавлением)
Ю. В. Геронимуса, под редакцией
В. Б. Орлова.*

МАТЕМАТИКА В ПОЛЬШЕ ¹⁾

В. Серпинский

(W. Sierpiński, Варшава)

Чтобы лучше осветить состояние математики в Польше в настоящее время, следует сначала сказать несколько слов о состоянии, в котором она находилась до первой мировой войны.

Существовало только два польских университета: один в Кракове, основанный в 1364 г., и один во Львове, основанный в 1661 г.; в этих университетах до войны было только четыре профессора-математика: Зоравский и Заремба в Кракове, Пижина и я — во Львове. Однако были поляки, которые работали в области математики за границей, в университетах и технических школах, как например, Птапинский, Сохоцкий, Млодзеевский, Станевич и Пшеборский — в России, Лихтенштейн — в Германии. Не существовало, однако, никакого польского математического общества, не созывались съезды польских математиков, существовала только математическая секция при конгрессе польских естествоиспытателей и медиков. На таком конгрессе, происходившем в Кракове в 1911 г., присутствовали все четыре профессора-математика польских университетов и Самуил Дикштейн из Варшавы, основатель и создатель наших математических журналов. Каждый из нас, пятерых, сделал на конгрессе свое сообщение, но при встречах вне конгресса мы дружески беседовали обо всем, кроме математики, потому что все мы работали в разных областях этой науки: Зоравский — в области геометрии, Заремба — в теории дифференциальных уравнений, Пижина — в теории аналитических функций, Дикштейн — в истории математики, я — в теории множеств и теории чисел. Не было проблем, которые одновременно интересовали бы нас всех.

После этого конгресса я пришел к убеждению, что такое положение вещей не удовлетворительно. Не было ни сотрудничества в работе, ни взаимного контроля. Существовало много *польских математиков* — математиков, известных за границей, но не было *польской*

¹⁾ Доклад, сделанный в Загребе 25 февраля 1957 г. Напечатан в журнале «Glasnik matematičko-fizički i astronomski» (том 12, стр. 125—132, 1957), издаваемом Хорватским физико-математическим обществом.

математики. Я считал, что было бы много лучше, если бы многие из нас работали в одной и той же области нашей науки.

В 1913 г. у меня во Львове Стефан Мазуркевич защищал свою докторскую диссертацию; содержание этой работы составляло решение поставленной мною задачи из теории множеств. В том же году я предложил молодому польскому математику Зигмунду Яннишевскому, доктору Парижского университета, интересы которого лежали в области топологии, должность ассистента математического семинара во Львовском университете.

В 1919 г., когда мы втроем встретились в Варшаве как первые профессора математики польского университета, мы решили основать в Варшаве журнал, посвященный теории множеств, топологии, теории функций действительного переменного и математической логике. Так родился журнал *Fundamenta Mathematicae*, 44-й том которого находится сейчас в печати.

Среди наших учеников в Варшавском университете было много высокоодаренных людей, и многие из них впоследствии сделались известными математиками — Куратовский, Сакс, Тарский, Кнастер, Зигмунд Линденбаум, Шпильрайн-Марчевский, Борсук, Заранкевич, Эйленберг, Попруженко, Мостовский, Шарцинский и другие. Некоторые из этих математиков стали профессорами или преподавателями нашего университета и создали вместе с нами математическую школу в Варшаве.

Иногда говорят, что у нас в Польше в период между двумя войнами математика была односторонней. Я не держусь этого мнения. С самого начала в Варшаве члены нашей школы работали в разных областях математики, таких, как теория множеств, топология, теория функций действительного переменного, математическая логика. Вне нашей школы профессор Зоравский и его ученики занимались геометрией, а профессор Дикштейн — историей математики. В Кракове Заремба и его ученики изучали классический анализ, математическая школа во Львове занималась функциональным анализом, а в Вильно Зигмунд со своими учениками работал в теории тригонометрических рядов. Были, правда, такие ветви математики, которыми в Польше в период между двумя войнами не занимались, но это отнюдь не оправдывает утверждения, что у нас в ту пору математика была односторонней. Следует также принять во внимание, что в эту эпоху в Польше в наших шести университетах, двух политехнических институтах и Горной академии было не больше трех десятков профессоров математики и теоретической механики. Современная математика разветвлена на несколько десятков различных областей, и если бы в каждой области должен был работать по крайней мере один из наших математиков, то положение было бы сходно с тем, каким оно было перед первой мировой войной: между нашими математиками не было бы сотрудничества, не было бы польской математики, а были бы только отдельные математики.

Тот факт, что в некоторых областях нашей науки одновременно работают многие польские математики, имеет своим следствием то, что в этих областях мы получили результаты, которые были высоко оценены математиками других стран. Я приведу только два примера.

Когда в 1935 г. появился 25-й том нашего журнала *Fundamenta Mathematicae*, профессор американского университета Н. Д. Тамаркин опубликовал в *Bulletin Amer. Math. Soc.* статью, в которой написал, что история нашего журнала есть в то же время история современной теории функций действительного переменного.

Между двумя мировыми войнами появилось 32 тома *Fundamenta Mathematicae*, содержащих 972 работы, принадлежащие 216 авторам всего мира. В 1947 г. *L'Intermédiaire des recherches mathématiques* — журнал, издававшийся тогда в Париже, — опубликовал перечень всех проблем, поставленных в 33 томах нашего журнала, прибавив следующую фразу: «Этот круг работ, посвященный теории множеств, сыграл существенную роль в прогрессе современной математики».

Первый том *Fundamenta Mathematicae* полностью разошелся; мы его переиздали в 1937 г. — это было исключительным явлением для польского научного журнала.

Вторая мировая война принесла тяжелые и невознаградимые потери польской математике. Смерть унесла около 50% наших профессороматематиков; среди них было много наиболее выдающихся: профессора Дикиштейн, Мазуркевич, Пиеборский, Райхман и Зальцвассер в Варшаве, Хоборский, Вилькош и Заремба — в Кракове, Банах¹⁾, Бартель, Ломницкий, Рущевич, Стоцек и Ветулани — во Львове, Кемписти — в Вильно. Скончались лекторы [*chargés de cours*] Кветневский, Линденбаум и Сакс — в Варшаве, Ауэрбах, Качмарж и Шаудер — во Львове. Из других математиков, известных своими работами, не стало г-жи Браун, Кернера, Кочневского, Любельского и Штекеля — в Варшаве, Эдельгайта, Якоба, Пеписа, Шрайера и Штерндаха — во Львове, Марцинкевича — в Вильно.

Таким образом, мы потеряли более тридцати польских математиков, научных работников. Смерть более чем двадцати из них произошла в условиях почти невероятных. Одни были замучены в концентрационных лагерях, другие уничтожены в гестапо, некоторые погибли в газовых камерах.

Помещение математического семинара Варшавского университета было разрушено бомбой во время воздушного налета и сгорело 1 сентября 1942 г. вместе с находившейся там нашей большой математической библиотекой. Более того, варшавские математики остались буквально без единой книги, без единого отдельного оттиска, потому что, когда в период август—декабрь 1944 г. немецкие войска изгнали жителей Варшавы и методически сжигали город, то в пламени

¹⁾ Банах умер после войны во Львове в результате перенесенных испытаний. (Прим. ред.)

погибли не только все частные библиотеки математиков, но и их рукописи, содержащие большую часть работ за период 1939—1944 гг.

Когда после войны я сообщил эти факты моему другу Монтелю, он зачитал мое письмо на заседании Парижской Академии наук, на котором было решено опубликовать это письмо в *Comptes Rendus*. Появление такого сообщения в *Comptes Rendus* было явлением совершенно исключительным.

Некоторые из наших математиков во время войны находились за границей и в Польшу не вернулись. Это — Антон Зигмунд — бывший студент, а затем лектор Варшавского университета, до войны профессор университета в Вильно, сейчас профессор университета в Чикаго; Альфред Тарский — бывший студент, а затем лектор университета в Варшаве, сейчас профессор университета в Калифорнии, бывший президент Американской Ассоциации символической логики, ныне президент Интернационального объединения философии науки; Вацлав Козакевич — до войны лектор Варшавского университета, теперь профессор университета в Канаде; Самуил Эйленберг — бывший студент и доктор Варшавского университета, теперь профессор Колумбийского университета в Нью-Йорке; Марек Кац — бывший студент и доктор Львовского университета, теперь профессор Корнельского университета в Итаке; Станислав Улам — до войны преподаватель Львовского университета, теперь старший научный сотрудник лаборатории Калифорнийского университета в Лос-Анжелесе; Герц Сплава-Нейман — доктор и до войны лектор Варшавского университета, теперь директор Статистической лаборатории и профессор университета в Калифорнии; Альфред Розенблат — бывший лектор Краковского университета, в течение нескольких лет был профессором университета в Лиме (Перу), где умер после войны; Ленецкий — бывший студент Варшавского университета, профессор университета в Бразилии, умер после войны.

Тот факт, что такое большое число наших математиков, бывших студентов наших университетов, получило кафедры в старейших американских университетах, свидетельствует о высоком уровне математики в наших университетах между двумя мировыми войнами.

В итоге наша страна потеряла в связи с войной около 60⁰/₁₀ математиков первого ранга.

После войны умерли профессора Казимир Зоравский в Варшаве и Зигмунд Криговский в Познани. Таким образом я сделался старейшим из наших математиков.

Перед второй мировой войной польские математики мечтали создать Национальный математический институт, но война помешала реализовать эти планы. И только в 1948 г. в Варшаве был основан Государственный математический институт, который поставил своей задачей не только развивать те области математики, которые достигли уже высокого уровня до войны, — теория множеств, топология, функциональный анализ, теория функций действительного переменного и основания математики, — но стимулировать также и исследования в области

анализа, алгебры и теории вероятностей, а также внедрять приложения математики к технике, физике, промышленности и национальной экономике.

Теперь этот институт представляет собой один из институтов Польской Академии наук, — высшее научное учреждение нашей страны, основанное в 1952 г. на базе Польской Академии наук и искусств в Кракове (которая существовала в продолжении почти 80 лет) и Общества наук и искусств в Варшаве (существовавшего 45 лет).

Наш Математический институт с момента его основания объединяет теперь (в Варшаве, Вроцлаве, Кракове, Познани, Торуне и Люблине) следующие 15 научных групп под руководством профессора Казимира Куратовского: 1) *основания математики*, руководитель А. Мостовский; 2) *топология*, руководители К. Борсук (Варшава) и Б. Кнастер (Вроцлав); 3) *функциональный анализ*, руководители С. Мазур и В. Орлич (Познань); 4) *алгебра*, руководитель И. Лосс (Торун); 5) *теория функций действительного переменного*, руководитель Е. Марчевский (Вроцлав); 6) *математический анализ*, руководители С. Мазур и Я. Микусинский; 7) *дифференциальная геометрия*, руководители С. Голомб (Краков) и В. Слебодзинский (Вроцлав); 8) *теория аналитических функций*, руководители Ф. Лея (Краков) и М. Бернацкий (Люблин); 9) *дифференциальные уравнения*, руководитель Т. Вачевский (Краков); 10) *интегральные уравнения*, руководитель В. Погоржельский (Варшава); 11) *математическая статистика*, руководители А. Ланге и М. Фиш (Варшава); 12) *статистический контроль качества продукции*, руководитель И. Одерфельд (Варшава); 13) *приложения математики к естественным наукам и национальной экономике*, руководитель Г. Штейнгауз (Вроцлав); 14) *технические приложения математики*, руководители С. Турский (Варшава) и С. Дробот (Вроцлав); 15) *математические машины*, руководитель Л. Лукашевич (Варшава). В Математическом институте Польской Академии наук активно работают 50 профессоров и преподавателей и около 70 молодых математиков. Можно сказать, что все польские математики, эффективно работающие в какой-нибудь области, являются сотрудниками института.

Каждый год составляется план (программа) работы, который рассматривается и утверждается Ученым советом института, президентом которого я имею честь состоять. Совет присуждает также ученые степени, включая и степень доктора математических наук.

Математический институт Польской Академии наук издает следующие журналы:

1. *Fundamenta Mathematicae* — журнал, основанный в 1920 г. З. Янишевским, С. Мазуркевичем и В. Серпинским и публикующий (на языках международных конгрессов) работы, посвященные теории множеств и ее приложений, а также вопросам, связанным с ней. До сих пор вышло уже 43 тома. Ответственным редактором является теперь К. Куратовский.

2. *Studia Mathematica* — содержит работы (на языках международных конгрессов) по анализу и теории вероятностей. До сих пор опубликовано 15 томов. Ответственный редактор — Г. Штейнгауз (Вроцлав).

3. *Annales Polonici Mathematici* (издается с 1954 г.) — является продолжением журнала «Сообщения Польского математического общества»; уже появилось 25 томов; в журнале публикуются (на языках международных конгрессов) работы, посвященные математическому анализу, геометрии и теории чисел. Ответственный редактор — Ф. Лея (Краков).

4. *Colloquium Mathematicum* — содержит сообщения об исследованиях, задачах, докладах, сделанных в научных обществах, и хронику событий, представляющих интерес для математиков (на языках международных конгрессов). Главный редактор — Е. Марчевский (Вроцлав).

5. *Prace Matematyczne* — продолжение журнала *Prace Matematyczno-Fizyczne*, основанного в 1888 г. С. Дикштейном (появилось 48 томов). Главный редактор — В. Орлич (Познань).

6. *Wiadomości Matematyczne* — продолжение журнала, основанного в 1887 г. под тем же названием С. Дикштейном (появилось до 1939 г. 44 тома). Главный редактор — В. Орлич.

7. *Zastosowania Matematyki* — журнал, посвященный приложениям математики. Главный редактор — Г. Штейнгауз (Вроцлав).

8. *Rozprawy Matematyczne* — публикует исследования, посвященные частным проблемам. Главный редактор — К. Борсук (Варшава).

9. *Monographie Matematyczne* — серия математических монографий, издаваемая с 1932 г. Появилось около 30 томов, в основном на французском и английском языках. Главный редактор — К. Куратовский.

10. *Acta Arithmetica* — журнал международного характера, посвященный теории чисел; возник в Варшаве перед войной, издавался А. Вальфишем и С. Любелским. Издание будет продолжено и появится в этом году под моей редакцией.

Математические статьи публикуются также в Докладах Польской Академии наук (например, в 1954 г. там напечатано 43 математические статьи).

Второй том *Wiadomości Matematyczne*, находящийся теперь в печати, будет содержать библиографию польской математики за период 1944—1954 г. В этой библиографии будет перечислено 1716 математических работ польских авторов, напечатанных в Польше или за границей (монографии, университетские курсы, оригинальные исследования). В нее не включены работы по методике элементарной математики, задачи, общие обзоры и критические статьи. Библиография состоит из 11 разделов, как например: основания математики (сюда включены теории множеств и математическая логика), топология, функциональный анализ и др. Каждому разделу предпосылается общая характеристика содержащихся в ней проблем и главных научных результатов и следствия из них, приводятся также вытекающие из содержания этого раздела соображения о дальнейшем развитии соответствующей области математики в Польше.

После войны было пять польских математических съездов: 1) в декабре 1946 г. во Вроцлаве, в котором, кроме 44 польских математиков, приняли участие трое иностранных математиков; 2) в мае 1947 г. в Кракове, где среди 58 членов съезда было восемь иностранных математиков; 3) в сентябре 1948 г. в Варшаве; 4) в конце августа и начале сентября 1949 г. в Праге (7-й польский съезд математиков совместно с 3-м чехословацким математическим съездом; этот двойной съезд собрал 120 членов: 50 польских математиков, 60 чехословацких, шесть венгерских и один — французский; на пяти секциях было сделано 13 пленарных докладов и более 110 сообщений); 5) 8-й польский математический съезд состоялся в сентябре 1953 г. в Варшаве и собрал около 200 польских математиков и 40 иностранных из 14 различных стран.

Чтобы закончить мое сообщение о математике в Польше, скажу несколько слов о математических олимпиадах, организуемых ежегодно, начиная с 1950 г., польским математическим обществом под руководством нашего Министерства народного просвещения. Это — ежегодные математические конкурсы, в которых могут принимать участие учащиеся всей нашей страны. Правила олимпиады предусматривают три тура испытаний; задачи, предлагаемые для решения, составляются центральным комитетом олимпиады. Для испытаний в первом туре учащимся даются задачи в каждой школе второй ступени в продолжении трех месяцев по четыре задачи в месяц. Учащиеся могут свободно решать их у себя и прислать их решения в письменном виде в Государственный комитет через своего школьного преподавателя. Государственные комитеты рассматривают решения и отбирают кандидатов на второй тур испытаний. Этот второй тур представляет собой письменное испытание, которое происходит одновременно в шести городах, где заседают государственные комитеты и где требуется решить шесть заданных задач за два дня. Результаты рассматриваются центральным комитетом, который намечает кандидатов на 3-й тур.

Это финальное испытание (также в письменном виде) происходит в Варшаве. Оно также содержит шесть задач. Затем центральный комитет рассматривает решения и назначает премии. Лауреаты, окончившие успешно школу второй ступени, имеют право быть принятыми без экзаменов на физико-математический факультет или в какой-либо технический институт. Государство выдает победившим специальные премии. Многие из наших лучших студентов были в свое время сначала победителями олимпиады. Один из них, Андрей Шинцель, которому еще нет 20 лет, уже опубликовал более 20 работ в математических журналах, польских и иностранных.

(Перев. с французского М. Г. Шестопал)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНГРЕСС

С 14-го по 21-е августа 1958 г. в Эдинбурге (Шотландия) состоялся Международный математический конгресс, проводящийся каждые 4 года; предыдущий конгресс состоялся в 1954 г. в Амстердаме (Голландия).

В работе конгресса участвовало около полутора тысяч математиков всех стран мира, в том числе — делегация советских математиков, включавшая около 30 ученых.

Работа конгресса проводилась по восьми секциям: 1) логика и основания математики, 2) алгебра и теория чисел, 3) анализ, 4) топология, 5) геометрия, 6) теория вероятностей, 7) прикладная математика, 8) история математики и вопросы преподавания. Некоторые секции (2-я, 3-я, 5-я и 7-я) были разбиты на подсекции, заседавшие раздельно.

В повестку конгресса было включено около 700 докладов, в том числе 22 часовых обзорных доклада, вынесенных на пленарные (вне-сессионные) заседания, и 41 получасовой обзорный доклад, читаемый на секциях. К чтению часовых докладов организационным комитетом съезда были приглашены, в числе прочих, пять советских математиков: А. Д. Александров (Ленинград), Н. И. Ахиезер (Харьков), Н. Н. Боголюбов, И. М. Гельфанд и Л. С. Понтрягин (все Москва); семи советским математикам было предложено прочесть и получасовые доклады. (Впрочем, повестка съезда не была полностью осуществлена.)

Конгресс присудил очередные премии за лучшие работы, выполненные молодыми математиками за истекшие 4 года; эти премии получили английский математик К. Рот за работу о приближении алгебраических иррациональностей рациональными дробями¹⁾ и французский математик Р. Тома за работы по топологии²⁾.

В одном из ближайших выпусков «Математического просвещения» будет помещена статья о конгрессе, написанная одним из членов советской делегации.

¹⁾ См. статью А. О. Гельфонда во 2-м выпуске «Математического просвещения», стр. 48—49; русский перевод работы Рота помещен в 1-м выпуске журнала переводов «Математика» за 1957 г.

²⁾ Русский перевод одной из основных статей Тома включен в сборник «Расслоенные пространства», М., 1958 г.

НОВОЕ РУКОВОДСТВО МЕЖДУНАРОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ

Незадолго до открытия Международного математического конгресса (см. заметку выше) в г. Сент-Андрус (Шотландия) состоялось пленарное заседание Международной математической ассоциации. На заседании было избрано руководство ассоциации на ближайшее четырехлетие; президентом ассоциации был избран Р. Неванлинна (Финляндия), а вице-президентами — П. С. Александров (СССР) и М. Морз (США).

КРАТКИЙ ОЧЕРК ИСТОРИИ ОБЩЕСТВА ЧЕХОСЛОВАЦКИХ МАТЕМАТИКОВ И ФИЗИКОВ¹⁾

Ф. Балада

(F. Balada, Чехословакия)

Начало возрождения чешской культурной жизни относится к концу 18-го — началу 19-го столетия. Свое выражение этот процесс получил, главным образом, в развитии художественной литературы; менее заметны были его проявления в области естественных и математических наук.

Не считая нескольких учебников начальной арифметики, в первой половине 19-го столетия на чешском языке вышли только «Элементы арифметики» С. Выдры (в 1806 г.) и «Геометрия» пльзеньского профессора и деятеля национального пробуждения Й. В. Седлачка (в 1822 г.). Наряду с работами Й. С. Сметаны и Й. С. Пресла (последний стремился заложить основы чешской математической терминологии), это были почти единственные чешские математические сочинения первой половины 19-го столетия²⁾.

Преподавание математики в средней и тем более в высшей школе велось на немецком языке. Правда, в 1848 г. на чешском языке преподавал математику профессор В. Яндечка (в гимназии г. Градец Кралове). Однако наступившая после революции 1848 г. реакция не позволила развиваться этому скромному начинанию, и возрождение чешской математики стало возможным лишь после провозглашения январской конституции 1861 г. В этом году на чешском языке начал читать свои лекции в Техническом училище профессор начертательной гео-

¹⁾ Перевод (с некоторыми сокращениями) сделан с рукописи, представленной автором в редакцию «Математического просвещения» и одновременно в чехословацкий журнал «Математика в школе». Напечатан в «Matematike ve škole» 7, № 8, 1957, стр. 451—468.

²⁾ Автор не упоминает здесь об известных математических работах Б. Больцано (о них см., напр., в монографии Э. Кольмана «Бернард Больцано», М., 1955), так как все они были написаны на немецком языке. Их, однако, нельзя исключать из общей картины развития чешской научно-математической мысли рассматриваемой эпохи, тем более, что часть из них публиковалась в «Трудах Королевского чешского научного общества». (Прим. перев.)

метрии Р. Скугерский, а год спустя его примеру последовал профессор физики В. Зенгер.

В 1862 г. вышла первая чешская книга по дифференциальному исчислению «Этюды по неопределенной аналитике». Автором ее был сельский приходский священник В. Шимерка. Это было первое чешское математическое сочинение, изданное Королевским чешским научным обществом.

Таким образом, к этому времени выявилось стремление культивировать математику на чешском языке, писать и преподавать по-чешски. Естественно, что это стремление нашло ревностных сторонников, особенно среди студенческой молодежи.

В Пражском университете в 1860—1861 годах математику преподавали профессора Якуб Филип Кулик¹⁾ и Вилем Матцка. Кулик, тогда уже очень пожилой человек, читал лекции три раза в неделю, посвящая первый час каждой лекции введению в высший анализ, а второй час — каким-либо его приложениям. Матцка, вступивший тогда в 61-год жизни, также читал шесть часов в неделю; он преподавал некоторые разделы анализа и элементарной математики, главным образом из области стереометрии; при этом Матцка пользовался специально изготовленными моделями. Математический анализ Матцка проходил в течение шести семестров.

Постановка преподавания математики в университете и в гимназиях, по-видимому, не удовлетворяла некоторых одаренных слушателей тогдашнего философского факультета, на котором математика читалась. В юбилейном издании «История общества чешских математиков в Праге» (1872 г.) мы читаем:

«Уже давно слушатели пражских высших школ, изучающие математику и физику, чувствовали потребность в организации, которая бы теснее сплотила их и способствовала развитию их интеллектуальных способностей, главным образом путем упражнения в чтении лекций. Для осуществления этого общего желания, студенты-математики Й. Лауц, Й. Фингер и Г. Блажек разработали 22 июля 1861 г. проект устава «Кружка для свободных чтений по математике и физике»²⁾. Позднее к ним присоединились д-р А. Грюнвальд и М. Кох, заявившие о своем согласии с разработанным уставом»³⁾.

При праздновании 25-летнего юбилея существования Общества один из его основателей, Г. Блажек, в своем докладе 24 марта 1887 г. припомнил интересную предысторию основания кружка. Уже в течение зимнего семестра 1860—1861 г. четыре студента-математика, среди

¹⁾ О Я. Ф. Кулике см. статью: И. Я. Депман, Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я. Ф. Кулик. «Историко-математические исследования», вып. VI, 1953, стр. 573—608. (Прим. ред.)

²⁾ «Verein für freie Vorträge aus der Mathematik und Physik».

³⁾ Устав кружка был утвержден пражским наместничеством 8 марта 1862 г.

которых был и Блажек, заключили дружеский союз для систематических занятий и упражнений в чтении лекций. Далее Блажек говорит:

«Мы раздобыли школьную доску, а каждый из нас достал компендий высшего анализа Шлёмильха, который мы решили тщательно проштудировать. Мы собирались регулярно два раза в неделю у кого-нибудь из нас, и тот, на кого падал жребий, приступал к лекции; затем лекцию продолжали второй, третий и четвертый; очередность также устанавливалась жребием. Этим достигалось то, что каждому из нас приходилось основательно изучать весь материал, который намечалось на этот раз проработать. Форма лекции подвергалась обсуждению, мы обращали внимание на недостатки каждого выступления, составляли протокол заседания. Каждый мог, кроме того, приносить математические задачи, которые предлагал решать другим».

Далее Блажек рассказывает, что этот частный кружок спустя некоторое время распался — отчасти вследствие своей слабости, отчасти вследствие взаимных обид участников на острую критику. Тем не менее кружок оказал столь благотворное влияние, что возник вопрос: не стоит ли на основе приобретенного таким образом опыта организовать более широкое и публичное общество?

Блажек говорит также о тогдашнем преподавании математики:

«Нам настоятельно опротивели университетские и гимназические чтения лекций непосредственно по учебникам и конспектам, что мы специально оговорили в уставе, что лекции в нашем кружке должны быть свободными¹⁾; эту тенденцию мы отразили и в названии кружка».

Поскольку имелись опасения, что в кружок захотят записаться, из чисто тщеславных побуждений, также студенты, не обладающие необходимой математической подготовкой и серьезными математическими интересами, было решено с целью обеспечения квалифицированного членского состава кружка принимать в него только тех, кто доказал свои способности собственными работами или решением специально предложенных задач.

«Этот пункт устава, — добавляет Блажек, — показался обидным для кое-кого из способных студентов и вызвал к нам неприязнь; кружок наш иронически прозвали „Академией наук“».

Первое время кружок развивался успешно. Так как языком преподавания в высшей школе и в гимназиях был в 1850—1863 гг. немецкий, то кружок первоначально носил «утраквистский»²⁾ характер. Но национальный подъем, наступивший после 1861 г., отразился и на тенденции кружка. Когда зимой 1862 г. умер профессор Кулик, было выставлено требование, чтобы отныне кафедра математики в университете занималась профессором, который читал бы лекции на чешском языке. Однако требование это не было удовлетворено, и лишь в 1870 г.,

¹⁾ То есть без конспекта. (Прим. перев.)

²⁾ Имеется в виду смешанный чешско-немецкий состав членов кружка, причем лекции могли читаться как на чешском, так и на немецком языках. (Прим. перев.)

после ухода в отставку престарелого Матцки, на его место был назначен профессор Ф. Й. Студничка, читавший математику по-чешски. Большая часть лекций в кружке в 1863—1864 учебном году была на чешском языке; немцы — члены кружка — начали утрачивать к нему интерес.

В 1863—1864 гг. во главе кружка стал чешский комитет; председателем его был энергичный Й. Лоштяк¹⁾.

Деятельность кружка в этот период была очень оживленной. Устраивались многочисленные лекции, много заботы уделялось устройству библиотеки, собиравшейся из пожертвований членов кружка. Особенно разрослась библиотека после пополнения ее собранием книг, принадлежавших проф. Кулику, а также — многочисленными дарами.

После ухода Лоштяка (начало 1864—1865 учебного года) в деятельности кружка наметился упадок. На восьми общих собраниях в следующем году постоянно обсуждался вопрос об изменении устава; однако никакого решения принято не было. Лекционная деятельность ослабела, финансы кружка и его библиотека стали приходить в расстройство.

Поворот к лучшему наступил со вступлением новых членов в 1867—1868 и следующих годах. Эта заслуга принадлежит в первую очередь секретарю кружка А. Зейдлеру, который энергично занялся устранением недостатков, в частности финансовых и организационных, и навел порядок в библиотеке. Через год, когда председателем кружка стал М. Нейман, а секретарем Ф. Гоудек, начался новый расцвет кружка. В аудитории, предоставленной кружку проф. А. Махом, стали устраиваться лекции по физике и эксперименты. Первую такую лекцию организовал 5-го июня 1869 г. Нейман, который продемонстрировал ряд очень удачных опытов по акустике.

Так началось развитие чешской математической жизни. В нем еще не принимал участия университет, где математика по-прежнему преподавалась на немецком языке. Отсутствовали также возможности для публикации трудов кружка.

Ставший к этому времени чисто чешским, национальный состав кружка больше не соответствовал его утратившему уставу. Изжила себя и потребность в исключительно академическом характере кружка. Это побудило комитет приступить к тщательному пересмотру устава. Инициативную роль здесь сыграл замечательный организатор Ф. Гоудек.

На чрезвычайном общем собрании 9-го мая 1869 г. был утвержден новый устав и принят новый организационный регламент. Было решено назвать кружок «*Обществом чешских математиков*» (Jednota českých matematiků). Это название было принято единодушно, хотя оно не отражало того факта, что членами общества были также физики,

¹⁾ Позже — директор учительского института в Пржиборже (Моравия) и областной школьный инспектор в Брно (умер в 1904 г.).

и того, что общество возникло из кружка для чтения лекций по математике и физике.

«Целью Общества является содействие стремлениям к научному усовершенствованию в области математики и физики, поощрение лекционного изложения этих наук, издание математических и физических сочинений...».

«Член Общества, назначенный председателем, в обязательном порядке должен прочесть на его заседании лекцию... Лекции допускались на чешском или немецком языках»¹⁾.

Был избран комитет Общества; председателем его стал М. Нейман, а секретарем — Ф. Гоудек. Так зародилось Общество, которое наряду с Московским математическим обществом является старейшей организацией этого рода во всем мире.

Вновь основанное Общество преуспевало и непрерывно росло²⁾. Главными деятелями математической жизни страны, принявшими широкое участие в жизни Общества этих лет, становятся профессор математики Пражского университета Ф. Студничка, братья Эмиль и Эдуард Вейры, А. Зейдлер, Ч. Строугал, К. Заградник, А. Панек. Из деятелей, живших вне Праги, нужно отметить, прежде всего, В. Шимерку — приходского священника из окрестностей Высокого Мыта, В. Яндечку — профессора гимназии, позже школьного советника, и Ф. Громадко — профессора средней школы.



Ф. Студничка.

Энтузиазм, бескорыстие и настойчивость в преследовании цели членов молодого Общества имели свою опору в растущем национальном и экономическом развитии чешского народа. Значение научного математического Общества начали сознавать не только отдельные лица, большей частью преподаватели математики средних и высших школ, но и целые профессорские коллективы. Членами Общества становятся городские советы, окружные представительства, ссудные кассы, общества сахарозаводчиков и известные деятели — нематематики.

Одной из движущих причин развития Общества явилась общая острая потребность в национальных учреждениях, где можно было бы культивировать науку на чешском языке. Недаром профессор

¹⁾ См. стр. 12 книги В. Посейпала, указанной на стр. 105 настоящего выпуска.

²⁾ К моменту преобразования в Общество кружок насчитывал около 120 членов. (Прим. перев.)

Янечка в письме, зачитанном на заседании Общества 16 января 1870 г., писал:

«Моим самым горячим желанием является то, чтобы Ваше Общество стало зародышем математической секции будущей чешской академии...».

В 1870 г. Общество приступило к систематической издательской деятельности. По инициативе покровителя Общества, профессора Ф. Студнички, был издан «Первый отчет» Общества, тиражом в 500 экземпляров. Через год последовал второй отчет (600 экз.), а в 1872 г. — третий. В этих отчетах были напечатаны рефераты лекций, читавшихся на заседаниях Общества. Кроме научных статей в отчетах помещались задачи по математике и физике. Во втором отчете была опубликована задача на премию для учеников средних школ: это была предтеча конкурсных задач, помещавшихся позже в специальных изданиях Общества. Здесь имелась также научная хроника, отдел смеси и рубрика «Библиография», где была описана вся чешская и важнейшая иноязычная физико-математическая литература, вышедшая в 1869—1872 гг.

«Отчеты» имели успех и явились важным начинанием, значение которого особенно повышалось тем, что это было первое математическое периодическое издание в австрийской империи.

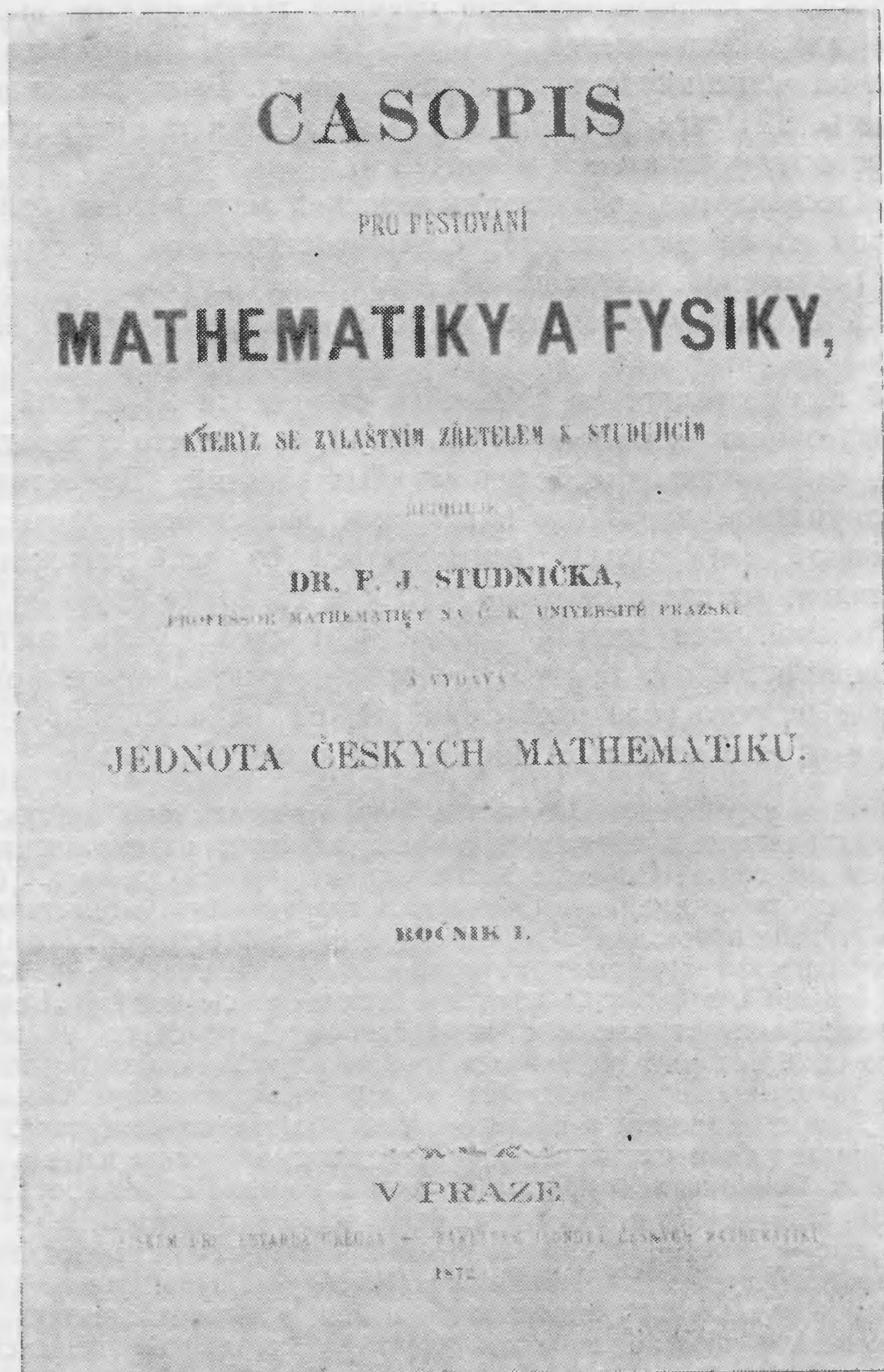
В это же время Общество принимало знаменательного гостя из России. На одном из еженедельных заседаний (3 декабря 1871 г.) присутствовал русский ученый, профессор Московского университета Бугаев. Деятельность и энтузиазм членов молодого Общества произвели на него сильное впечатление. По возвращении в Москву Бугаев организовал обмен московского «Математического сборника» на издания чешского Общества.

Успешный опыт публикации трех отчетов побудил руководство Общества создать регулярный математический журнал. Решение об этом было принято на специальном общем собрании (11 февраля 1872 г.). Редактором журнала был избран Студничка, а членами редакции — Г. Блажек, Э. Вейр и М. Нейман. Согласно принятому решению первый номер «Журнала для развития математики и физики» («Časopis pro pěstování matematiky a fysiky»¹⁾) вышел в свет 17 марта 1872 г., в день празднования десятилетия основания «Кружка для свободных чтений по математике и физике».

Этот десятилетний юбилей был отмечен очень торжественно и вылился в событие национального значения. В праздновании приняли участие передовые деятели тогдашней чешской научной и культурной жизни — Палацкий, Ригер, Томек, Крейчи и многие другие. На торжестве были зачитаны, между прочим, выдержки из книги «История Общества чешских математиков в Праге», написанной секретарем общества Гоудеком.

¹⁾ В дальнейшем цитируется «Часопис».

Чтобы сделать более выпуклой обрисованную нами картину первого десятилетия существования Общества, упомянем еще о некоторых моментах, относящихся к этому периоду. Постоянно растущая



Титульный лист первого выпуска «Часописа».

издательская деятельность Общества, в частности уже выпуск «Первого отчета», заставила членов Общества заняться проблемой чешской математической и физической терминологии. По предложению профессора Громадко и благодаря энергии руководства Общества был в рекордно

короткий срок созван съезд чешских физиков и математиков, проходивший 5—6 августа 1870 г. под председательством Студнички. Работа съезда протекала в атмосфере радостного воодушевления; на съезде был принят ряд решений, направленных к благу чешской науки и школы. Были обсуждены вопросы чешской научной терминологии, выработаны директивы для составителей отчетов Общества, поставлен вопрос о переводе на чешский язык «Начал» Евклида. Было также постановлено созвать в Праге в 1871 г. съезд всех чешских математиков, физиков, естествоиспытателей и врачей¹⁾.

Первое десятилетие организации чешских математиков ознаменовалось работой по ее укреплению, совершенствованию ее структуры и развитием регулярной издательской деятельности. Общество завоевало и утвердило за собой почетное место в культурной жизни чешского народа.

В 1872 г. председателем Общества становится 24-летний профессор Пражского политехникума Эмиль Вейр, только что возвратившийся из Италии, где он находился для научных занятий. Приветливый характер, незаурядное дарование и широкая известность молодого ученого позволили ему хорошо ознакомиться со всей математической жизнью Италии, во главе которой стоял в то время крупный геометр Луиджи Кремона. Все свои способности и связи Вейр поставил на службу Обществу, и оно быстро приобрело международное признание. Уже в конце первого года пребывания Вейра на посту председателя мы читаем в отчете секретаря общему собранию Общества:

«Лучшим украшением Общества нужно считать его дружественные связи с заграничными организациями и с видными математиками и физиками, чем мы обязаны прежде всего нашему председателю ... Он обратил на Общество внимание выдающегося итальянского математика Л. Кремоны, который присылает в порядке обмена свой журнал „Annali di matematica pura ed applicata“ и, кроме того, связывает наше Общество с Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere присылкой его „Rendiconti“. Установился контакт также с профессором Туринского университета, д-ром Овидио, который обменивает на наш журнал неаполитанский „Giornale di matematiche“ и печатает у нас на французском языке свою статью „Точки, плоскости и прямые в однородных координатах“. Направляет Обществу свои статьи и профессор Римского университета Батталлини; князь Боикомпани присылает нам в порядке обмена журнал „Buletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche“, проф. Брисс — „Nouvelles annales des mathématiques“, профессор Гуэль — выходящий в Париже „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques“ и при этом постоянно подчеркивает в многочисленных письмах свое дружеское расположение к Обществу. Знаменитый парижский геометр Шаль, председатель Société mathématique de France, способствует установлению контакта с этой организацией, присылая ее „Бюллетень“, и представляет издания нашего Общества во Французскую Академию. В скором времени Общество намерено завязать отношения с английскими обществами, с польской и югославянской академиями ... Важно особенно то,

¹⁾ Этот съезд также состоялся и прошел очень успешно, собрав около 200 участников.

что иностранные журналы, например берлинский „Fortschritte der Mathematik“ и „Bulletin“ Гуэля, обратились в Общество с просьбой о рефератах наиболее значительных статей, помещенных в нашем журнале... Иностранцы начинают больше интересоваться чешской наукой. Французский инженер Роде просил Общество о присылке некоторых чешских руководств по физике. Другой француз, Бринетт, прислал решение задачи, помещенной в нашем журнале; проф. Гуэль просил чешскую грамматику и французско-чешский словарь; он сам составляет рефераты о нашем журнале¹⁾.

Всесторонние зарубежные связи, установленные так быстро после основания «Часописа», сыграли весьма важную роль в развитии Общества и чешской математики вообще. Наличие этих связей обязывало к тому, чтобы уровень статей в журнале и других публикаций, обмениваемых с заграницей, был возможно более высоким. Этому требованию, однако, трудно было удовлетворить в рамках журнала, который должен был, с одной стороны, служить высокой научной трибуной, а с другой, — отвечать запросам менее подготовленных читателей и, в частности, учащихся средней школы.

Поэтому после продолжительных обсуждений было решено приступить с января 1875 г. к изданию еще одного журнала, посвященного исключительно научным проблемам международного уровня — «Archiv matematiky a fysiky». В год выходило четыре выпуска «Архива», каждый объемом не менее трех печатных листов.

Первый годовой комплект «Архива» насчитывал 234 страницы и был отредактирован Эмилем Вейром, который сам поместил в нем одну статью на французском, одну — на итальянском и одну — на немецком языках. Кроме статей Эмиля Вейра, мы находим здесь статью его брата Эдуарда Вейра, работы К. Заградника, Э. Чубра, большого друга Общества французса Гуэля, работы Панка, Сухарла, Стрнада, Махова и других авторов. Издание «Часописа» продолжалось, но его программа была теперь ограничена статьями по элементарной математике и физике.

В связи с переездом Эмиля Вейра в Вену редакторами «Архива», начиная со второго тома, стали А. Зейдлер и Эдуард Вейр. Второй том, кроме трех немецких статей и работы Марко Микшица из Ракова, содержит исключительно чешские статьи, число которых достигает двенадцати²⁾.

Кроме «Часописа» и «Архива», Общество издавало еще «Вестник Общества чешских математиков» (Věstník Jednoty českých matematiků), выходивший сначала четыре раза в год, а вскоре — ежемесячно, хотя и не вполне регулярно. «Вестник» служил информационным органом Общества. Редактором его был Ф. Гоудек.

Издательская деятельность Общества не ограничилась периодическими публикациями. Оно начинает издавать также математические

¹⁾ Стр. 23 книги В. Посейпала, указанной на стр. 105 настоящего выпуска.

²⁾ Среди авторов мы находим имена Г. Блажка, Эд. Вейра, А. Сикоры, В. Строугала, К. Заградника и других.

монографии, учебники и др. В частности, в ознаменование 400-летия со дня рождения Коперника была издана (1873) работа Студнички о жизни и деятельности великого астронома.

Первым учебником, вышедшим в издании Общества, была «Начертательная геометрия в задачах для высших реальных школ» Ч. Яролимка (1873). В том же году в переводе председателя Общества вышла первая часть книги Л. Кремоны «Введение в геометрическую теорию плоских кривых», в следующем году была напечатана вторая часть этого сочинения.

Издательская активность Общества росла из года в год. Рост этот, однако, носил сначала слишком стихийный характер, в результате чего в 1878 г. материальное положение Общества, несмотря на внешние успехи, оказалось полдорванным. Но кризис удалось преодолеть новому правлению Общества под руководством его председателя М. Покорного, вице-председателя А. Панка и неперменного секретаря Эд. Вейра. Возобновился рост издательской деятельности Общества. Было издано много учебников, научных работ, переводов важнейших сочинений, полемических публикаций; среди этих изданий были настоящие шедевры чешской математической литературы. Укрепились материальная основа Общества, что позволило ему наряду с изданием литературы, рассчитанной на большой спрос, выпускать также особенно ценные научные труды даже и в тех случаях, когда издание их было заведомо сопряжено с материальными убытками.

В результате Обществом было издано множество первоклассных математических трудов. Мы имеем прежде всего в виду серию книг «Сборник Общества чешских математиков». Первый ее выпуск, вышедший в 1898 г., содержал работу Эд. Вейра «Проективная геометрия основных образов первого порядка». Это была первая значительная сводная работа по проективной геометрии на чешском языке. Книги серии, отличавшиеся высоким научным уровнем и издававшиеся значительным тиражом, рассчитанным на многолетний спрос, стали в стране основными руководствами для изучения математических наук.

Большое значение для прогресса преподавания математики и начертательной геометрии в чешской школе имело то внимание, которое уделялось Обществом изданию школьных учебников. Спустя год-два после выпуска издательством Общества первого учебника Яролимка «Начертательная геометрия в задачах» им были изданы другие руководства того же автора — «Геометрия для IV класса реальных школ» и «Начертательная геометрия для высших реальных школ». За ними последовал целый ряд учебников математики, начертательной геометрии и физики для школ различных типов. Позднее стали издаваться также учебники и по другим предметам школьного обучения. Целые поколения учились алгебре по сборнику упражнений Ф. Громадко и А. Страда, постоянно перерабатываемому и переиздаваемому. Получившая широкую популярность «Алгебра для старших классов средних школ» Тафтла (переработанная впоследствии при участии Солдата) и

оригинальная «Геометрия для высших реальных школ» Стрнада десятилетиями служили молодежи, изучающей основы математики. В 1903 г. вышло первое издание утвердившихся затем на целое полу столетие логарифмических таблиц Валоуха, пришедших на смену таблицам Студнички.

Школьная реформа 1908—1909 гг. потребовала переработки и дополнения учебников для средней школы. Ряд членов Общества с готовностью посвятил себя этой задаче, благодаря чему уже в 1909—1910 учебном году вышли некоторые учебники арифметики (Л. Червенки, Б. Быджовского), геометрии (М. Валоуха, Я. Войтеха), начертательной геометрии (И. Питгардта — Л. Зейферта) и других предметов. Тем самым школы были обеспечены учебниками, соответствовавшими новым программам и новым принципам преподавания этих предметов. 1909—1910 учебный год был годом рекордной издательской активности Общества.

С прекращением «Архива» сейчас же дали знать о себе прежние затруднения с изданием «Часописа», который в течение десяти лет редактировался Студничкой, а затем Эд. Вейром и (с 1885 г.) Панком. Журналу международного уровня приходилось вместе с тем исполнять функции математического журнала для учащихся средней школы. Поэтому в конце концов было принято решение сводить в каждом номере журнала статьи по элементарной математике в отдельную, последнюю часть (с объемом в 1—1,5 листа), которая могла распространяться по особой подписке среди учащихся средних школ (члены Общества и другие категории подписчиков получали полные номера «Часописа»). Из этого «Приложения» к «Часопису» возник в 1922 г. журнал «Обозрение математики и природоведения» («Rozhledy matematicko-přirodovědecké»¹⁾), отметивший уже 35 лет своего существования.

Вернемся, однако, еще немного назад. В 1912 г. Общество праздновало пятидесятилетие своего существования. Оно могло с удовлетворением оглянуться на результаты своей деятельности, о которых едва ли могли бы мечтать скромные основатели «Кружка для свободных чтений». Пятидесятилетие Общества было отмечено также выпуском обширной книги проф. Посейпала «История Общества чешских математиков»²⁾ и специальной брошюры, содержавшей описание юбилейных торжеств. По этим материалам можно видеть, каким большим уважением не только в Чехии, но и во всем мире пользовалось Общество. Так, по случаю юбилея Общество получило теплые поздравления от Петербургской Академии наук, от Академии наук в Кракове, от Югославянской академии наук и искусств. Прислали свои приветствия также академии наук в Вене, Амстердаме, Брюсселе, Риме, Вашингтонский «Смитсоновский институт», Физическая секция Российского физико-хи-

¹⁾ Об этом журнале см. «Математическое просвещение», вып. 3 стр. 311.

²⁾ Dr. Václav Posejpal, Dějepis Jednoty českých matematiků, Praha, 1912.

мического общества, Харьковское математическое общество и ряд других видных учреждений из всех концов мира.

В 1912—1913 г. Общество завершает работу по созданию новых школьных учебников и переиздает ряд прежних. Серия «Сборник Общества чешских математиков» пополняется ценной книгой проф. К. Петра «Интегральное исчисление».

Хотя годы войны 1914—1918 не благоприятствовали усилению издательской активности, Общество все же принимает решение о создании, наряду со «Сборником», еще одной серии — «Библиотеки математических и физических сочинений». При этом в «Библиотеке» должны были печататься более обширные оригинальные монографии по новейшим научным вопросам, которые по своему объему не подходили для «Часописа», а также работы обзорного или вводного характера, могущие служить пособием студентам высшей школы или справочными книгами для специалистов.

Первым выпуском этой серии была книга Б. Гостинского «Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей»; далее последовали «Основания математики» Я. Войтеха и «Физика» В. Новака. Этим издательская деятельность Общества в годы войны, однако, не ограничилась: продолжался выпуск учебников для учащихся, а также были изданы книги по специальным вопросам, например «О тэта-функциях» Дусла или «Современные представления о природе вещества» Сухого.

Сразу же по окончании первой мировой войны правление Общества стало принимать меры для его укрепления и дальнейшего расширения его деятельности. Общество получило право печатать и продавать книги. Не представляется возможным описать в небольшой статье всю огромную работу, которую Общество проделало для развития математической жизни в Чехословакии, для улучшения математического преподавания в школе и для представительства чешской науки на международной арене. Вместе с ростом чехословацкого просвещения выросли и задачи Общества. Поскольку учебники издавались для всей территории страны, Обществу пришлось озаботиться изданием учебников и на словацком языке.

В 1921 г. правление Общества приняло решение об издании новой серии книг — «Монографии по математике и физике» (позже серия получила название «Круг»). Первым выпуском этой серии была книга Ф. Завишки «О принципе относительности». Серия редактировалась проф. Б. Быдзовским.

Всестороннее внимание было уделено и периодическим изданиям. «Часопис» и «Обозрение» постоянно совершенствовались и были дополнены «Дидактико-методическим приложением», библиографической хроникой и т. д. Продолжалось также издание «Вестника», содержавшего информационный материал о текущей деятельности Общества. С 1932 г. (с 61 тома) все эти издания выходили в качестве отдельных частей объединенного «Часописа».

Большие усилия прилагались Обществом в области реформы чешской средней школы. Профессор Б. Шаламон составил об этом вопросе информационный отчет, который был роздан всем членам Общества и уже в 1921 г. распространен среди членов парламента. С этого времени реформа образования молодежи в средней школе является предметом постоянного попечения Общества. Была создана соответствующая комиссия под председательством Б. Быдзовского.

Учитывая нужды преподавателей средней школы, Общество начало издание «Собрания руководств по методике для средней школы»; в этой серии вышли «Методика черчения» Вавржинца, «Методика физики» Фридриха и другие книги.

В тридцатых годах Общество играло первостепенную роль в развитии точных наук в Чехословакии. Благодаря своим учебникам, методическим директивам, публикациям и лекциям Общество оказывало большое влияние на объем и метод преподавания этих наук, особенно математики, начертательной геометрии и физики.

Постоянной была лекционная деятельность Общества. Широкое официальное участие принимало Общество в конгрессах и съездах математиков разных стран, в частности в съездах математиков славянских стран (особенно во втором таком съезде, состоявшемся в Праге в 1934 г.).

Общество успешно справилось с задачей, которую поставили новые школьные программы 1933 г. Оперативно были выпущены новые учебники математики, начертательной геометрии и физики¹⁾.

На юбилейном акте 7 декабря 1937 г. Общество отпраздновало 75-летие своего существования. По этому случаю в торжественной речи проф. Ф. Нушла были подведены некоторые итоги развития Общества за предшествующие 25 лет и, в частности, был отмечен достигнутый за этот период рост численности Общества с 1200 до 1800 членов.

В годы оккупации Общество осталось организационным центром всех отечественных математиков и физиков. Здесь была организована тайная учебная помощь студентам высших учебных заведений, закрытых оккупантами; издательство заботливо исполняло заказы на присылку учебников, хотя это и не соответствовало требованиям оккупантов; члены Общества готовились к возобновлению занятий в высшей школе по окончании войны.

Стремление оккупантов подавить всякую культурную деятельность, которая могла бы напомнить о богатой научной жизни Чехословакии прошлых лет, а также недостаток бумаги и типографий, вызвали прекращение издания почти всех чешских научных журналов. «Часопис» перестал выходить в 1941 г.; четвертый номер юбилейного семидесятого тома был тайно набран и отпечатан, но мог быть разослан лишь по

¹⁾ Это нужно поставить в заслугу Быдзовскому, Червенке, Теплому, Вычихле, Валоуху, Шпачеку, Петире, Войтеху и другим авторам.

освобождении страны в 1945 г. Уцелели лишь «Обозрения», предназначенные для учащихся средних школ.

Даже в тяжелые и скорбные годы оккупации Общество не забыло одной из своих главных задач — решения вопросов дидактики и методики преподавания математики. Комиссия по методике математики и начертательной геометрии возобновила свою деятельность в 1941 г. Она занималась подготовкой новых учебников (были рассмотрены и обсуждены учебники арифметики и геометрии проф. Э. Чеха, учебник арифметики для старших классов, вопрос об употреблении в школе таблиц и др.), разработкой руководств по методике математики и методике геометрии и составлением проектов реформы средней школы и реформы преподавания в ней математики и начертательной геометрии. Аналогичная комиссия была создана и по физике.

Руководствуясь стремлением дать читателям хорошие популярные книги, способные служить прочным мостом между школьным образованием и современной жизнью, Общество приступило к изданию новой серии книг, получившей название «Путь к знанию»; серия эта, вместе с тем, должна была в какой-то степени заполнить вакуум, образовавшийся в результате препятствий, чинившихся оккупантами изданию научной литературы. В серии вышел ряд публикаций, завоевавших признание читателей, большая часть их быстро разошлась. В апреле 1940 г. была издана первая книга этой библиотечки — «Об уравнениях» д-ра С. Шварца.

В большую заслугу руководству Общества нужно поставить сохранение, вопреки действиям оккупантов, обширной и уникальной библиотеки, одной из крупнейших этого рода в Центральной Европе. Вывезенную оккупантами из страны часть библиотеки (интернациональные журналы) пришлось возвращать уже при помощи чехословацкой армии.

Велики жертвы, понесенные Обществом в годы утраты страной своей независимости. Многие видные ученые, теоретики и практики были казнены, погибли в концентрационных лагерях или умерли в результате болезней, полученных в местах заключения. Памяти этих жертв была посвящена чрезвычайная сессия Общества, проведенная 17 декабря 1945 г. В речи проф. В. Тркала, в частности, было отдано должное заслугам председателя Общества проф. д-ра Ф. Завишки, погибшего в последние дни войны на марше смерти в Германии.

После освобождения Чехословакии славной Советской армией Общество приступило к восстановительной работе. К прежним изданиям была присоединена еще одна библиотечка небольших книг для учащихся средних школ, получившая символическое название «Врата к знанию».

В условиях нового общественного устройства страны задачи Общества должны были во многом измениться. Ряд задач, которые до того времени решались органами Общества, теперь были возложены на государственные учреждения. В частности, издательство Общества вошло в качестве одной из главных частей в состав вновь созданного «Издательства Чехословацкой Академии наук».

Правление Общества на своем общем собрании от 11 апреля 1951 г. приняло решение передать государству здание Общества в Праге для нужд вновь организованного Математического института Академии наук. Этому же институту была передана библиотека Общества, насчитывавшая около 10 000 томов; Общество сохранило за своими членами право пользования библиотекой, а также оставило для своих целей часть помещений в переданном доме. Характером этих решений Общество подтвердило свою верность тем передовым традициям, в духе которых оно всегда действовало.

В период этих преобразований активность Общества, естественно, весьма ослабела. Лекционную и дискуссионную деятельность продолжала «Пражская математическая община», лекции и собрания регулярно проводились Брненским отделением Общества (основанным в 1913 г.).

Организация центральных математического и физического институтов, повысившиеся требования к науке в эпоху социалистического строительства и немислимые в прошлом внимание и поддержка, которые сейчас оказывает государство нашим наукам, вызвали необходимость реорганизации на более широкой основе «Часописа» — журнала Общества чехословацких математиков и физиков. Математическая часть «Часописа» была отделена от физической, и обе части были преобразованы в самостоятельные журналы «*Casopis pro matematiku*» и «*Casopis pro fysiku*», которые стали издаваться соответствующими центральными институтами, преобразованными затем в институты Чехословацкой Академии наук.

В настоящее время выходит «Чехословацкий математический журнал» (на русском языке) в качестве органа международного значения; для внутренних нужд страны издается «Журнал для развития математики» («*Casopis pro pěstování matematiky*»). Выходят также два физических журнала — международный «Чехословацкий физический журнал» и «домашний» «Журнал по физике» («*Casopis pro fysiku*»).

«Обозрения» вступили сейчас (1957 г.) в 35-й год своего издания. В помещенном в первом номере 35-го тома обращении министра школ и культуры д-ра Ф. Кагулы говорится, что «Обозрения» будут продолжать славные традиции своего прошлого.

24 мая 1956 г. состоялось общее собрание Общества. Председатель Общества академик Б. Быдзовский сделал на собрании отчет о деятельности Общества за послевоенное десятилетие, в котором сказал:

«После издания в 1949 г. основного закона о школе Общество прекратило издание учебников для средней школы, поскольку по этому закону издание учебников стало функцией Государственного педагогического издательства. Типография Общества была национализирована в 1948 г. Обществу удалось добиться сохранения прежнего характера этой типографии как типографии научной книги...».

Докладчик отметил, что большая часть лежавших прежде на Обществе задач перешла теперь к государственным органам и к учреж-

дениям Чехословацкой Академии наук. Обширное имущество Общества перешло к тем учреждениям, которые будут в соответствующем направлении продолжать его деятельность.

По предложению проф. Валоуха собрание приняло новый устав Общества, в котором была подчеркнута прямая преемственность между новым и прежним Обществом. Затем состоялись выборы председателя Общества. Избранный на этот пост Ф. Кагуда, министр школ и культуры, произнес программную речь, в которой указал направление дальнейшей деятельности Общества. Он отметил, что цели Общества будут, как и прежде, двоякими, т. е. будут лежать как в плоскости прямого содействия научной работе, так и в плоскости решения проблем преподавания. В качестве ближайших особенно актуальных вопросов, заслуживающих внимания Общества, новый председатель назвал следующие: 1) вопрос о связях математики и физики, а также математических и технических наук, 2) уточнение терминологии в математике и в физике, 3) продолжение прогрессивных традиций и проблема истории как чешской, так и мировой математики и естествознания вообще, 4) вопрос о координации издательской деятельности в области математики и физики.

Для решения указанных вопросов было предложено практиковать (в сотрудничестве с институтами Чехословацкой Академии наук) лекции и семинары, а для рассмотрения более важных вопросов — рабочие конференции. Тем же целям будет служить и новый орган Общества, которым (со своего 2-го тома) стал журнал «Успехи математики, физики и астрономии» (*Pokroky matematiky, fysiky a astronomie*). Журнал этот возник из выходившего в Чехословакии в течение предыдущих шести лет информационного журнала «Советская наука — математика, физика и астрономия» (*Sovětská věda — matematika, fysika a astronomie*).

Сочетая давние традиции с новыми целями, Общество сейчас уверенно идет по пути дальнейшего расцвета чехословацкой математики и физики. Отчеты отделений Общества, имеющих в Праге, Брно, Братиславе, Пльзене и других городах, свидетельствуют о подъеме плодотворной деятельности Общества.

(Сокращенный перевод с чешского Ю. М. Гайдука)

МАТЕМАТИКА И БУДУЩЕЕ НАУКИ

Маршалл Стоун

(M. Stone, США)

К статье М. Стоуна

Предлагаемая вниманию читателя статья написана известным американским математиком Маршаллом Стоуном—автором фундаментальной монографии «Линейные преобразования в пространстве Гильберта» (Нью-Йорк, 1932). Ему принадлежит, в частности, основная теорема о спектральном представлении группы унитарных операторов в гильбертовском пространстве ¹⁾. Интерес статьи усиливается тем, что это — специальный доклад, прочитанный по приглашению Американского математического общества на годовом собрании его членов ²⁾ (27—29 декабря 1956 г.). Поэтому положения и оценки, содержащиеся в статье, очевидно, должны рассматриваться как нечто большее, чем простое выражение собственных взглядов одного крупного американского математика.

Эта статья содержит немало спорных положений. Автор придает чрезвычайно большое значение процессу «математизации» науки и, увлеченный успехами этого процесса, дает, в сущности, комментарий к известным словам Канта: «Я утверждаю, что в каждой отдельной естественной науке можно найти собственно науку лишь постольку, поскольку в ней можно найти математику».

Но, конечно, не этим определяется интерес статьи. Наибольшее значение, с нашей точки зрения, имеет изложение взглядов автора (и той, по-видимому, весьма значительной группы американских математиков, которую он представляет) на взаимоотношение «чистой» и «прикладной» математики, перспективы их развития и на ту роль, которая возлагается в осуществлении этих перспектив на самих математиков. Интересным представляются также общая оценка

¹⁾ См., например, Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, М., 1954, стр. 408 и след.

²⁾ Тринадцатая «гиббсовская лекция», прочитанная в Рочестерском университете. Опубликовано в Bulletin of the American Mathematical Society 63, № 2, 1957, стр. 71—76; Marshall Stone, Mathematics and the Future of Science.

американской математики в прошлом и критика современного утилитарного направления в преподавании математики в американских средних и высших школах.

В целом статья Стоуна интересна главным образом с точки зрения той информации, которую она может дать нашему читателю о взглядах американских ученых на современное состояние и перспективы развития математики, взглядах, базирующихся в значительной мере на фактическом положении дел в американской науке.

Перевод статьи Стоуна снабжен нами немногочисленными примечаниями.

А. И. Маркушевич

Мне оказали поистине большую честь, пригласив прочитать в этом году гиббсовскую лекцию, на что я дал почтительное согласие. Труды Джозаи Уилларда Гиббса¹⁾ содержат исследования в прикладной математике такой красоты и совершенства, что наиболее подходящей данью, которая могла быть отдана ему здесь, являлась бы научная статья, написанная на его уровне. Такая дань не по моим силам. Мои научные интересы лежат в области чистой математики, и я никогда не имел претензии непосредственно содействовать развитию прикладной математики, не питал иллюзий, что мог бы такое содействие оказать. Однако я никогда не принадлежал к числу тех математиков, чья радость растет от уверенности, что их исследования не будут использованы вне обетованной области чистой математики. Напротив, мое удовлетворение от занятий математикой увеличивается с сознанием того, что сделанное мною, за немногими исключениями, имеет отношение к математической физике или к какой-либо другой ветви прикладной математики. Большую радость доставляет мне также ознакомление с путями успешного применения результатов чистой математики для разгадки секретов природы, объяснения их и, в конечном счете, — использования. Поэтому моя дань Гиббсу примет форму выражения уверенности в растущей важности математической мысли для будущего науки. В этой связи я хочу говорить об основаниях моей веры в то, что удивительное развитие математики, свидетелями которого мы являемся в настоящее время, содержит зачатки блестящего научного прогресса в будущем.

В известном смысле всё, что можно сказать на эту тему, заключено в следующем силлогизме: *наука есть рассуждение, рассуждение есть математика и, следовательно, наука есть математика*. Так как мне кажется, что этот простой довод хорошо выражает сущность неразрывных связей между математикой и наукой, я хочу посвятить несколько слов пояснению и оправданию тех предпосылок, на которых он построен.

¹⁾ Дж. У. Гиббс (1839—1903) — американский математик и физик, один из основателей химической термодинамики и статистической механики. (Прим. ред.)

Меньшая посылка силлогизма ставит вопрос, являвшийся предметом спора между логиками и математиками с момента опубликования «Principia Mathematica»¹⁾). Я думаю, что обе стороны правы: логики — когда они заявляют, что математику можно формализовать в виде определенных систем формальной логики, и математики — когда они считают, что системы формальной логики сами являются особыми математическими системами, которые следует изучать математическими методами. Хотя я пытался в моих собственных математических работах (одна из которых будет упомянута на этом собрании) обосновать сторону математиков в этом споре, я уверен, что вопрос следует решить, приравняв математике формальную логику, как это сделано здесь. Для наших дальнейших рассуждений важно то, что это равенство признает за математикой охват значительно больший, чем изучение величин и числа. В самом деле, это требует от нас понимания математики как науки, изучающей общие системы, в которые входят определенные объекты и определенные соотношения между ними. При этом количественные или числовые аспекты отдельных математических систем следует считать не главными или характеризующими, а скорее второстепенными или феноменами для математики в целом. С этой точки зрения было бы, например, неверно рассматривать научную теорию как нематематическую только на том основании, что эта теория не количественная.

Наша большая посылка явно зависит от определения того, что следует подразумевать под термином «наука»²⁾). Ответ, который мы намерены здесь дать, как раз подтверждает эту главную посылку, именно: *наука содержит те и только те дисциплины, в которых рассуждение играет преобладающую и существенную роль.*

Помимо того, что в обыденной американской речи и письме термин «наука» вряд ли употребляется в этом смысле, против нашего определения могут быть выдвинуты более серьезные возражения, которые заслуживают вдумчивого рассмотрения. Не следует ли определение науки построить так, чтобы выявить роль наблюдения, эксперимента и предвидения? Нет ли необходимости принять в расчет различие между индуктивным и дедуктивным мышлением? Не имеет ли *содержание* рассматриваемой дисциплины какое-либо отношение к вопросу квалификации ее, как науки? Не является ли наше определение слишком широким в одних отношениях и слишком узким в других? Подобные вопросы, несомненно, заслуживают разъяснения, хотя обстоятельства и заставляют меня быть кратким.

¹⁾ Речь идет о фундаментальном труде Уайтхеда и Рассела, вышедшем в свет в 1910—1913 гг. и содержащем обоснование математики как области логики: A. Whitehead and B. Russell, Principia Mathematica; т. 1, 1910; т. 2, 1912; т. 3, 1913; Cambridge, England University Press. (Прим. ред.)

²⁾ Английский термин «science», помимо общего смысла, тождественного с понятием науки, имеет еще специальное значение: *естественные науки*. Поэтому, когда автор ниже утверждает, например, что история не есть «наука», он хочет сказать, что история не есть естественная наука. (Прим. ред.)

Любая интеллектуальная дисциплина имеет дело с регистрируемыми наблюдениями, пытаясь найти в них известный порядок и систему и осмыслить их. Несомненно, что пока наблюдения не становятся чем-то большим, чем случайное или систематическое собрание фактов, их нельзя принимать за характеристический признак «науки». В противном случае мы должны были бы рассматривать историю и литературу или эстетическую критику как «науки», и вскоре признали бы, что применяем критерий, не имеющий ценности. С другой стороны, если потребовать, чтобы термин «наука» прилагался только к тем дисциплинам, основным элементом которых являются систематические, направленные и контролируемые наблюдения, одним словом — эксперименты, то мы можем тогда исключить из числа «наук» геологию или метеорологию.

Мы могли бы попытаться избежать этих противоречий, построив определение в терминах «направленного наблюдения». Но мне кажется, что эта попытка обречена на неудачу ввиду трудности решить, что подразумевать под «направленным наблюдением». Как можем мы различать типы наблюдений, производимых историком, ботаником, систематиком и метеорологом, пользуясь критерием «направленности»? Я бы сказал, что мы можем это сделать, только определив, в какой степени наблюдения в этих различных дисциплинах направляются логическими теоретическими структурами, которые складывались годами, и связываются с ними. Но если это так, то мы вернулись к характеристике науки, основанной на главенствующей роли мыслительного элемента.

По другому поводу ¹⁾ я высказывал мысль, что, в отличие от ненаучных дисциплин, неотъемлемой частью «науки» является *предвидение*. Не изменяя прежней позиции, я должен заметить, что и этот критерий возвращает нас еще раз к определению, с которого мы здесь начинали. В самом деле, возможность предвидеть как детерминистически, так и статистически непосредственно опирается на способность выводить точные заключения из общих принципов, полученных на основе предыдущих наблюдений и изучения. Чем больше мы пытаемся совершенствовать наши прогнозы, тем больше мы должны совершенствовать эти принципы и аргументы, обосновывающие их. С нашей точки зрения сказать, что история не «наука» ²⁾, ибо она не предсказывает, значит просто привлечь внимание к тому факту, что в историческом исследовании рассуждение не играет ни доминирующей, ни существенной роли ³⁾.

¹⁾ M. H. Stone, *Science and statecraft*, Science 105 (1947), стр. 507—510.

²⁾ См. примечание на стр. 113. (*Прим. ред.*)

³⁾ Автор, чуждый философии диалектического материализма, видит в истории чисто описательную дисциплину. Между тем построение истории на основе исторического материализма позволяет вскрывать закономерности исторического процесса и делать прогнозы, исполняющиеся с той же неизбежностью, как и прогнозы естествознания. (*Прим. ред.*)

Хотя эта дискуссия о смысле, который следует вкладывать в термин «наука», далеко не завершена, было, вероятно, сказано достаточно, чтобы квалифицировать предложенное здесь нами определение как полезный аналитический инструмент и разъяснить наше заключение, что «наука есть математика». Тем не менее всякий логический анализ взаимоотношений «науки», рассуждения и математики оставляет желать еще многого, ибо его рамки слишком узки, чтобы вместить какое-либо объяснение роста и развития дисциплин, признанных нами за «науки». Оглядываясь назад, мы видим, что науки, которые мы называем сегодня астрономией, физикой и химией, прошли различные стадии, возникнув в очень давние времена с практических ремесел, став затем предметами эрудированного изучения и рассмотрения и достигнув, наконец, положения интеллектуальных дисциплин, сконцентрированных вокруг тщательно разработанных математических теорий. Действительно, в каждом из этих трех случаев мы не встретим серьезных затруднений в определении момента, с которого началось преобразование в научную фазу. Эти моменты отмечены вкладками Евдокса, Галилея и Ньютона, Лавуазье и Пристли.

В то время как эти примеры могут служить укреплению нашего убеждения в том, что именно мыслительная компонента интеллектуальной дисциплины отождествляет ее с наукой, они также заставляют нас признать, что в каждой отрасли знания эта компонента должна развиваться, часто весьма медленно, из небольшого числа семян. Если мы взглянем вокруг себя, то увидим такие семена, дающие всходы на многих полях и зарождающиеся на многих других. Это — не только те области знания, которые имеют дело с физическим и биологическим мирами, но и те, которые связаны с разумом человека и его существованием как социальным бытием. Мы, без сомнения, являемся свидетелями развития новых наук и можем быть уверены, что во многих из них будем наблюдать быстрое развитие по теоретической, математической линии. В самом деле, мы имеем сильнейшие логические и исторические основания для веры в то, что эта тенденция математизации знания, которая началась с греков, будет расширяться и ускоряться в грядущем столетии.

Указанная тенденция неизбежно будет вызывать и стимулировать прогресс самой математики. Как показывает история современной физики, эта тенденция в свою очередь будет в известной степени обуславливаться и направляться успехами, которых смогут добиться математики. Будущее науки в этом смысле тесно связано с будущим математики. Исключительно плодотворное развитие чистой математики в наше время позволяет смотреть с оптимизмом и энтузиазмом на будущее, в котором наука будет снимать обильный урожай плодов математического поля.

С точки зрения логики и уроков истории было бы весьма наивно ожидать, что математика будет в состоянии сделать полноценный вклад в развитие науки, если сами математики не проявят активного и

компетентного интереса к приложениям ее в многочисленных областях науки, старой и новой. Хотя распространение математических методов мышления в большинстве различных областей знания можно считать неизбежным, оно легко может задержаться и отклониться препятствиями, которые следует обнаруживать и устранять для того, чтобы развитие науки ускорилося. Может быть, и верно, что мир проложит дорогу к дверям человека, который усовершенствует мышеловку, как однажды сказал Эмерсон, но мы — математики — должны понимать следующее: какие бы хорошие мышеловки мы ни изобретали, мир очень медленно осознает свою нужду в них и столь же медленно будет находить наиболее удобные пути к нашим дверям.

Задача привлечения внимания общества к нашему фонду мышеловок и указания некоторых подходов к нему в основном является задачей математиков. Это — трудная задача, к решению которой нельзя удовлетворительно приступить до тех пор, пока мы сами не добьемся более ясного и более глубокого понимания изменений, вызываемых математическим, естественно-научным и техническим прогрессом в природе прикладной математики и ее взаимоотношениях как с чистой математикой, так и с наукой и техникой. Среди всех аспектов нашей центральной темы, которые могли бы быть подробнее рассмотрены, нет ни одного, который не казался бы мне столь актуальным и значительным, как эволюция, испытываемая в настоящее время прикладной математикой. Поэтому я буду в оставшееся время говорить о *прикладной математике*.

Эта тема вызвала в последние годы большое количество дискуссий и статей. Поэтому невозможно избежать повторения всем известных положений. Там, где возможно, я только слегка коснусь вопросов, которые уже освещены подробно в других местах. Более детальное рассмотрение этих вопросов можно найти в одной из обстоятельнейших работ последнего времени на эту тему, в отчете состоящего при Национальном исследовательском совете «Комитета по обучению и исследованиям в прикладной математике»¹⁾, где я имел честь работать. Вместо этого я постараюсь выделить те соображения и точки зрения, которые, как мне кажется, обладают некоторой степенью свежести, если не новизны. Я вижу нечто новое уже в том, что чистый математик предлагает откровенно обсудить насущные проблемы прикладной математики.

С тех пор, как я впервые пытался выяснить свою собственную точку зрения на перспективы прикладной математики в неопубликованной речи, прочитанной по случаю празднования пятидесятой годовщины Чикагского университета, я всё более осознавал известную напряженность, вызванную существованием двух различных и философски про-

¹⁾ F. J. Weyl, «A survey of training and research in applied mathematics in the United States», a Report by National Research Council's Committee on Training and Research in Applied Mathematics, 1955; издано как монография «Обществом индустриальной и прикладной математики».

тивоположных взглядов на приложения математики. Напряженность ощущается в большинстве дискуссий на эту тему, даже если эти взгляды не высказываются прямо. Я понял также, что попытки обсуждать прикладную математику без открытого выявления позиций спорящих вызывает смятение и недобрые чувства. Поэтому я хочу начать свои замечания по этому предмету с ясного указания собственной позиции.

Прошло, пожалуй, немало времени, пока я понял сущность и истинное значение упомянутых двух различных точек зрения, хотя никогда не колебался в своем выборе между ними. Мне потребовалось бы для этого еще больше времени, не столкни меня счастливый случай с очерком президента Изельского университета Уитни Грисуолда. Он исследует в этом очерке природу основного спора, ведущегося в современных американских педагогических кругах¹⁾.

Грисуолд характеризует этот конфликт как происходящий между общим и утилитарным образованием и прослеживает его истоки вплоть до давних времен. Речь идет о противоположности между точкой зрения, согласно которой *целесообразно всё, что развивает умственные и духовные силы личности*, и точкой зрения, считающей *целесообразным всё, что действует и приводит к полезным результатам*.

Грисуолд цитирует замечательный отрывок из Фрэнсиса Бэкона:

«Прежде всего, меня удивляет, что столь многие замечательные учебные заведения Европы посвящены подготовке к профессиям и ни одно из них не предназначается изучению наук и искусств вообще. Ибо если люди полагают, что обучение должно направляться деятельностью, то они правы, но при этом они впадают в ошибку, описанную в старой басне. Части тела сочли желудок бездейственным, ибо он не выполняет ни двигательных функций, как конечности, ни мыслительных, как голова; тем не менее именно желудок переваривает пищу и распределяет ее для всех остальных. Точно так же, если полагают, что философия и универсальность — пустые занятия, то не принимают во внимание, что они обслуживают и поддерживают все остальные профессии. И я считаю основным препятствием прогрессу знания то, что эти фундаментальные науки изучаются только в отрывках. Ибо, если вы захотите, чтобы дерево приносило больше плодов, чем прежде, вам нечего делать с его ветвями, а нужно взрыхлять землю и подложить новую почву под корни».

Разве это не превосходно сказано? По-моему, — да, и я рад, что разделяю позицию Фрэнсиса Бэкона. Вместе с ним я полагаю, что одна полезность не есть настоящая мера ценности; я готов пойти далее и сказать, что если полезность понимать прямолинейно и недальновидно, то она становится опасной и ложной мерой. Применение строго утилитарной мерки к математике, являющейся одновременно чистым и свободным творением разума²⁾ и необходимым инструментом

¹⁾ A. W. Griswold, What we don't know will hurt us: the power of liberal education, Harper's Magazin, июль 1954, стр. 76 и след.

²⁾ См. ниже, примечание на стр. 119.

науки и современной техники, может привести только к катастрофе: это вызвало бы иссушение источников современного математического познания и, в конце концов, затормозило бы деятельность в области прикладной математики. В математике нужно стремиться скорее к правильному соотношению между чистой теорией и практическими приложениями, как советует Фрэнсис Бэкон.

Особая важность, которую может иметь для нашего времени поддержание такого соотношения, не так давно была подчеркнута Аланом Уотерменом, директором Национального научного фонда, в речи, прочитанной перед нашим Обществом и Математической Ассоциацией. Уотермен сказал:

«Математика в известном смысле заполняет брешь, реальную или воображаемую, существующую между естественными и гуманитарными науками. Требования современной техники свели многие науки с их первоначальных орбит в сферу натуральной философии. Математика также имеет свою практическую часть, играющую роль в современном мире, но, развиваясь, она никогда не теряет своего научного духа. Она занимает, может быть, одинаково почетное место среди гуманитарных и естественных наук»¹⁾.

Я лелею в душе заветную надежду, что математика, несмотря на изменения, вызываемые расширением ее собственных границ и потребностями современного общества, всегда будет сохранять свою цельность и, таким образом, сможет и далее претендовать на положение двойной славы, всегда ставя перед собой те высокие примеры интеллектуальных достижений, которые одни дают ей право достойно занимать столь почетное место!

Позвольте теперь вернуться к рассмотрению изменений в математике, побуждающих нас к пересмотру и переоценке наших суждений о взаимоотношениях чистой и прикладной математики. Для этой цели необходимо исследовать исторические факторы, которые в совокупности создали настоящее положение.

Приблизительно к началу нашего столетия математика вступила в новую фазу своего развития, предназначенную свершить глубокие преобразования ее сущности и структуры. Изменения, произведенные за короткий период, менее чем в шестьдесят лет, поразительны как по многообразию, так и по значимости. Их степень можно оценить совершенно точно, если сравнить университетские учебные планы 1900—1920 гг. с современными, или привести длинный перечень новых математических концепций, методов и дисциплин, едва ли известных пятьдесят лет назад, а ныне составляющих существенную часть интеллектуального багажа любого математика, претендующего на общее знание своего предмета. Этот расцвет чистой математики в двадцатом столетии вызвал специализацию, неотделимую от интенсивного исследования новых возможностей, непрерывное испытание жизнеспособности

¹⁾ A. T. Waterman, The National Science Foundation program in mathematics, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), стр. 207—214.

новых идей и непрестанные усилия охватить общими понятиями быстро накапливающиеся продукты плодотворных исследований. Необходимым условием этого расцвета было то, что в своей деятельности математики исходили из следующего осознанного ими факта: математика не находится в тесной связи с материальным миром или физической действительностью, если только вообще эта связь существует¹⁾.

Как следствие такого понимания, чистые математики нашего столетия ищут будущее математики не в одной только технической виртуозности, но также в абстракции и обобщении. На протяжении всего своего длительного исторического развития западная математика, сознательно или бессознательно, имела дело с математическими сторонами реального мира: свойствами чисел, геометрией пространства, в котором мы движемся, динамикой движущихся вокруг нас тел. Математики полагали, что создаваемые ими теории этих объектов позволят дать философское понимание природы, а также некоторую практическую власть над ней. Всё это ясно проявилось в достижениях таких великих математиков, как Архимед, семейство Бернулли, Эйлер, Лаплас, Гаусс и Коши, чьи вклады в науку почитаются сегодня как прикладными, так и чистыми математиками. Это проявилось также и в трудности, к которой привело открытие неевклидовой геометрии в первой половине девятнадцатого столетия, когда начали понимать, что математика впредь должна будет иметь дело с двумя геометриями, лишь одна из которых может представлять пространство, в котором мы существуем, и, более того, что искусные измерения, вроде тех, которые производил Гаусс, могут быть недостаточными, чтобы решить, которая из двух геометрий применима к физическому миру.

Полное значение этого глубокого нового проникновения в свободу математической теории от физической необходимости осознавалось исключительно медленно отчасти из-за того, что XIX столетие еще имело перед собой огромную задачу, заключавшуюся, главным образом, в обосновании уже построенных теорий, отчасти же потому, что математическая техника, находившаяся на ранней стадии своего развития, неотложно нуждалась в пересмотре и совершенствовании до уровня, достаточного для предстоящей работы.

¹⁾ Автор, философские позиции которого представляются эклектическими, повторяет здесь излюбленный идеалистами тезис. Достаточно, например, следующих высказываний А. Гейтинга — автора «Обзора исследований по основаниям математики»:

«В одном отношении они [представители ведущих современных направлений. — *Ред.*] согласны между собой, — и это сейчас можно считать почти единодушным мнением всех математиков, — что положения чистой математики не говорят ничего о действительности...». [А. Гейтинг, Обзор исследований по основаниям математики. Перев. с нем. А. П. Юшкевича, ОНТИ, М.-Л., 1936, стр. 84.]

Однако ниже сам автор будет приводить многочисленные доводы, опровергающие этот тезис. (*Прим. ред.*)

Таким образом, на долю двадцатого столетия выпала участь проникнуть в такие глубины, куда предыдущее столетие лишь заглянуло. Инструментом, использованным для выполнения этой задачи, был *аксиоматический*, или *постулативный метод*, в настоящее время столь хорошо известный, что мне нет нужды описывать его здесь.

Находятся люди, которые заявляют, что в использовании постулативного метода они видят главную черту современной чистой математики. По моему мнению, ошибочно полагать или допускать, что простой инструмент, хотя и могущественный и характерный, может составлять сам по себе сущность интеллектуального движения, влекущего математиков этого поколения вперед к достижениям, которые наложат неизгладимую печать на математику будущего. Скорее всего, лучшим выражением духа современной чистой математики является именно то, что этот инструмент сделал возможным, а именно — расчленение математических концепций на их элементарные компоненты, комбинирование этих компонент в новые конструкции существенного значения, критическое развитие различных подходов к важным математическим теориям, унификация до сих пор оторванных ветвей математики. Хотя отдельные частности на первый взгляд противоречат этому, чистая математика фактически продолжает вращаться вокруг великих центральных проблем теории чисел, геометрии и анализа, которые имеют дело с объектами столь же реальными, как и абстракции атомного или ядерного физика. Чистая математика, несмотря на вполне естественную занятость самостоятельным весьма плодотворным и успешным развитием, никогда не прекращает, по словам Фрэнсиса Бэкона, «направлять познание к деятельности». Действительно, она продолжает черпать вдохновение у оракула природы и по-прежнему всегда сознает роль, которую она играет в возрастающих средствах прикладного математика для понимания мира, в котором мы живем. Интересные свидетельства этого помещены в упомянутом выше отчете Национального исследовательского совета, где отмечается, что «в той мере, в которой связи с современной физикой в нашей стране [США. — Л. М.] вообще поддерживаются математической деятельностью, ряду факультетов чистой математики удастся заботиться об этом лучше, чем любому центру прикладной математики». Но, — повторяю то, на чем настаивал выше, — чистая математика не может принять «направленность к деятельности» за единственный критерий, которым оценивается ее работа.

В то время как чистая математика росла таким быстрым и замечательным образом более полувека, прикладная математика также испытала весьма сильные изменения: с одной стороны, это радикальная переориентация, с другой — значительное расширение ее поля деятельности. Наиболее эффектное развитие, поистине революционный характер которого всеми признан, захватило основы физики. Отказ в динамике от классических взглядов, ведущих начало от Галилея и Ньютона, в пользу теории относительности и теории квантов

доставили математическому анализу огромную массу материалов, который с трудом поддавался исследованию классическими методами математической физики. Поистине неизбежно теоретическая физика должна была переместить центр своих основных интересов в увлекательные новые области, которые напрашивались на разработку, оставив как бы на втором плане исследование многих традиционных областей науки, в частности гидродинамику, теорию упругости и другие направления механики сплошных сред. С тех пор эти области стали интересовать больше инженеров и некоторых математиков, чем физиков. В то же время химия, которая, естественно, до сих пор была только слегка затронута математикой и то, главным образом, через посредство термодинамики и статистической механики, теперь испытала сильное столкновение с новыми атомистическими теориями. Несмотря на серьезные пробелы, которые с тех пор были обнаружены благодаря накоплению новых данных относительно элементарных частиц и нуклонов, эта теоретическая эволюция, несомненно, определяет полный успех прикладной математики.

Этот успех был бы невозможен без использования математических инструментов — таких, как тензорное исчисление, теория непрерывных или топологических групп. И хотя большая часть этих инструментов уже имела в фонде, созданном ранее математиками, физик 1900 года, вероятно, рассматривал бы их еще как простые математические курьезы. Одной из причин, почему чистая математика стремится, как отмечалось выше, поддерживать некоторый контакт с современной теоретической физикой, является тот факт, что новые применения этих инструментов ставят новые, интересные сами по себе, трудные вопросы для традиционно важных ветвей математики. Многие плодотворные математические исследования последних лет были посвящены как раз таким вопросам, в особенности вопросам, относящимся к представлениям топологических групп и теории операторов в гильбертовом пространстве. С другой стороны, теоретическая физика, уже в высокой степени математическая по форме, использовала абстракции и теории более или менее умозрительного характера для исследования, в котором аксиоматический или постулативный метод, характерный для современной чистой математики, показал себя наиболее мощным инструментом. Можно привести много примеров, но наиболее замечательны, вероятно, статьи Дирака¹⁾ и Юкавы²⁾, в которых позитрон и мезон постулировались и подвергались математическому исследованию еще до того, как было доказано физическое существование той и другой частицы. В настоящее время математические и идейные трудности теории полей, очевидно, создали новый кризис теоретической физики, что требует, по-видимому, дальнейшего проникновения в физическую

¹⁾ P. A. Dirac, Proc. Roy. Soc. London, Серия A, 126 (1926—1930), стр. 360—365, 133 (1931), стр. 60—71.

²⁾ H. Yukawa, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan 17 (1935), стр. 48—57.

сущность явления, а также новых математических инструментов. С точки зрения математика, не лишено вероятности, что часть этих затруднений физиков происходит из-за недостаточного владения ими современными математическими методами и концепциями. Действительно, большинство достижений современной теоретической физики базируется на математике девятнадцатого столетия, что, понятно, становится недостаточным для дальнейшего прогресса.

Хотя математические успехи в области физики являются наиболее эффектными и поразительными, двадцатое столетие явилось свидетелем многих других достижений прикладной математики. Как и в случае квантовой теории, многие из этих достижений тем или иным образом зависят от использования математической статистики. Мы знаем, что многие из основных процессов природы представляются неподдающимися никакой точной детерминистской характеристике и должны рассматриваться в терминах математической статистики. Это справедливо не только для поведения элементарных частиц в физике, но и для механизмов, управляющих наследственностью. Современная теория генетики, вероятно, наиболее высоко развитая, и математическая часть теоретической биологии, таким образом, основаны на статистических принципах.

Благодаря громадному диапазону своих применений, начиная с теоретической физики и кончая социальными науками, математическая статистика испытала быстрое и экстенсивное развитие и приобрела теперь положение независимой дисциплины. В настоящее время мы знаем, что математически она является ветвью теории меры, которая связана с реальным миром простыми принципами, выражающими сущность индуктивного мышления.

Существуют, конечно, известные расхождения по поводу того, как эти принципы формулировать. Мне всегда казалось, что в первом приближении они должны базироваться на простом правиле: «достаточно маловероятный случай может игнорироваться». Если рассуждать по этому правилу, то роль математики должна сводиться к основанному на теории меры подсчету взаимосвязанных вероятностей, а роль практического познания — к выявлению в каждом конкретном положении того, какие вероятности достаточно малы. Почему реальный мир обязан подчиняться такому правилу — это, я думаю, философский вопрос, не более и не менее загадочный, чем проблема, почему этот мир должен подчиняться логике. Тот факт, что эти вопросы являются лишь двумя аспектами основной проблемы об отношении между разумом и материей, приводит меня к мысли, что различие между индуктивным и дедуктивным мышлением может несколько помочь в определении того, что мы подразумеваем под «наукой». Во всяком случае, насколько это касается технических приемов, развитие математической статистики в ее новейшей форме показало, что фактически все процессы индуктивного мышления, подвергнутые расчленению, имеют дедуктивный характер.

Если бы я имел время и знания, то в качестве иллюстрации можно было бы детально описать тот путь, по которому прикладная математика развивалась в течение настоящего столетия. Кроме того, что происходило в естественных науках, отличных от физики и химии, следовало бы рассмотреть в известной мере опыт формирования математических теорий некоторых биологических явлений. К упомянутым выше работам в генетике тесно примыкает математическое изучение роста популяции и борьбы видов; практическое значение этого очевидно. Следовало бы также упомянуть о математическом исследовании различных физиологических проблем, включая теорию нервной системы и мозга. Затем мы должны были бы пойти дальше и исследовать возникновение новых математических теорий различных физиологических и социальных явлений, как, например: вывод наблюдаемых статистических закономерностей в языке, исходя из теории информации, интерпретация некоторых ситуаций, возникающих при конкуренции, в терминах теории игр, или приложение линейного программирования к проблеме управления.

Длинным был бы уже перечень подобных теорий. Мне кажется, что главное здесь — в новых и многообещающих применениях математики к областям, некогда считавшимся недоступными математическому исследованию либо по принципиальным соображениям, либо потому, что они не поддавались подобному исследованию. Чаще всего добиться некоторого успеха в этих направлениях позволяет именно возможность использования новых математических инструментов, каковы, например, современные методы математической статистики или теории игр.

Я уверен, что имеются все основания ожидать в ближайшем будущем значительных достижений, связанных как с развитием новых математических методов, так и с непосредственными применениями уже существующих. Однако оптимизм относительно успехов такого характера следует умерить некоторой долей осторожности. Несмотря на то, что, как кажется, существуют весьма достаточные основания для оптимизма, мы должны признать, что достижения математики еще далеко не упрочили ее положение вне сферы точных наук, исключая, возможно, область генетики. Более того, распространены взгляды, особенно в социальных науках, согласно которым жизненно важные стороны поведения живого организма никогда не поддадутся математическому исследованию и, в некоторых случаях, вообще научному исследованию в самом широком значении этого слова. Некоторые из наиболее привлекательных и значительных интеллектуальных событий ближайших десятилетий, вероятно, будут связаны с попытками определить границы возможного математического проникновения и в такие неизведанные области.

Требования техники нашего времени стали оказывать всё возрастающее давление на развитие прикладной математики, так что появляется необходимость отвечать всё точнее и точнее на всё более многообразные и трудные вопросы, возникающие в связи с проекти-

рованием, конструированием новых сложных или универсальных машин и их управлением. Вторая мировая война предъявила некоторые из этих требований с особенной резкостью и настойчивостью, которые с тех пор, пожалуй, были еще усилены последующей холодной войной. Представляется очевидным, что в конце концов эти требования будут нам предъявляться одинаково настойчиво как соревнованием между человеком и природой, так и соревнованием между людьми.

Технические требования сыграли особенно значительную роль в возрождении одной из ветвей прикладной математики — динамики непрерывных сред, которой, как мы уже отмечали ранее, пренебрегали как математики, так и физики. Тот факт, что эта область нуждалась в новых математических и физических идеях, наводит на мысль, что прошлое пренебрежение происходило из убеждения, что в тот момент наука еще не была готова преодолеть осознанные ею препятствия к дальнейшему развитию. Конечно, такое убеждение могло только увеличить тяготение к другим областям знания, тяготение само по себе достаточно сильное, чтобы оторвать большинство математиков от этой весьма важной классической области. Технические применения математики, естественно, требуют числовых ответов и, таким образом, поощряют вычислительные схемы и математическое искусство их создания. Автоматизация этих схем, сама зависящая от высокой степени математического мастерства, была успешно предпринята, отвечая этим нуждам; она имеет важное значение для будущего. При этом существенно расширилась не только сфера применений прикладной математики, так как необходимые вычисления могут теперь производиться с высокой скоростью и относительно небольшой затратой сил, но и само математическое искусство вычисления поднялось до более высокого уровня и стало намного более интересным. Нелегко представить себе, как повлияет введение современных быстродействующих счетных машин на математику или на взаимоотношения математики и промышленности. Имеется определенная возможность, что промышленность, руководствуясь только утилитарными взглядами, будет, в целом, стремиться ограничить свой интерес к прикладной математике организацией работающих групп из прикладных математиков и вычислителей, которым дана задача с максимально возможной степенью мастерства давать конкретные ответы на ограниченный круг конкретных вопросов. По-видимому, в Соединенных Штатах возникает сейчас настоятельная потребность в такого рода деятельности. Если бы эта тенденция не уравновешивалась параллельным развитием глубокого интереса к математике в целом, подобного тому, который постоянно оказывали в прошлом ряд ведущих индустрий здесь и за границей, то имелись бы основания смотреть на будущее с некоторым опасением.

Мне кажется, что отклик американской математики на те широкие течения и события, которые мы пытались здесь описать, был в значительной мере обусловлен некоторыми специфическими условиями американской жизни. Эти условия, я думаю, можно отчасти объяснить,

рассматривая их как продукт опыта Америки — нации пионеров, отрезанной на время от исторических центров своей культуры. Вероятно, другим фактором, как предполагает президент Иэльского университета Грисуолд в цитированной выше статье, является недавняя иммиграция большого числа мужчин и женщин из тех элементов европейского общества, которые имели наиболее слабые контакты с интеллектуальными центрами континента. В Америке восемнадцатого и девятнадцатого века создание центров исследования и подготовки специалистов в области высшей математики далеко отставало от Европы. Несмотря на передовое влияние таких, в сущности, одиноких фигур, как Сильвестр и Бенджамен Пирс, вплоть до последнего десятилетия прошлого века сколько-нибудь устойчивый интерес к высшей математике не характерен для развития американских университетов. Таким образом, огромные математические центры, усеивающие теперь всю страну, получили полное свое развитие за промежуток времени, лишь немногим больший шестидесяти лет. Для этого развития характерно не только то, что оно почти совпало с великим расцветом чистой математики, описанным нами выше, но и почти полное освобождение американских математиков от только что упомянутого культурного отставания. Они не были связаны строгими академическими традициями, им не препятствовали могущественные научные течения в их проложении пути, по которому должна следовать высшая математика в Америке. В то же время в высшей степени прагматические взгляды американского промышленника и бизнесмена — также продукт пионерского опыта — не позволяли им требовать от математики иной роли, кроме самой скромной, утилитарной. В результате математики нашей страны были свободны направлять свои усилия на великие центральные проблемы современной математики, и как преподаватели, так и исследователи включились в захватывающий прогресс чистой математики двадцатого столетия. Действительно, в американской математике ясно наметилась тенденция к абстракции и обобщению, что должно казаться странным всем, кто уверен в утилитарной направленности американской культуры. Если американская математика получила исключительную независимость от утилитарных требований и, таким образом, смогла добиться важного интеллектуального прогресса, то она в то же время была поставлена в ложное положение как в интеллектуальном, так и профессиональном отношениях. Утилитарная философия никоим образом не является уделом одних Соединенных Штатов, хотя здесь она, вероятно, так же сильна, как и везде в мире. Она имеет влияние не только на промышленные применения науки, в том числе и математики, но также и на взаимоотношение отдельных ветвей науки и, наверное, сильнее всего в Соединенных Штатах.

Выяснить, как влияют утилитарные взгляды на математику, особенно важно, ибо все науки, как мы пытались здесь показать, проявляют общую тенденцию к росту зависимости от математического мышления и, таким образом, нуждаются во всё более глубокой и разумной оценке

природы и ресурсов современной математики. Едва ли нужно указывать, что в эту эпоху специализации многие из лучших работ в прикладной математике выполнены людьми, которые вовсе не считали себя математиками, а физиками, химиками и биологами. И это, добавим, должно быть связано прежде всего с тем обстоятельством, что хорошая работа в прикладной математике в равной степени относится к природе, как и к математике. Большинство ученых, во всяком случае в нашей стране, легко становится на строго прагматическую и утилитарную точку зрения на математику. Они, в конце концов, рассматривают ее просто как более или менее полезный инструмент, относительно которого вовсе необязательно знать намного больше, чем его непосредственно используемые основные характеристики. Ученый, который соскользнул на эту позицию, признает истинным в математике только то, что работает. На таком пути весьма серьезно разрушаются связи между чистой математикой и многими ветвями прикладной математики. Если истинное положение математики должно быть восстановлено и ей будет позволено, таким образом, сыграть свою интеллектуальную и профессиональную роль, то эти связи должны быть восстановлены внутри научного мира и расширены на весь технический мир.

Хотя вопрос о способах восстановления и сохранения равновесия между чистым и прикладным направлениями в математике выходит за рамки моей речи, как и вообще всякое детальное рассмотрение, — я направляю свои заключительные замечания на то, чтобы подчеркнуть еще раз, что мы, математики, в первую очередь обязаны находить эти способы и применять их. Это тем более верно, что наиболее важным способом влияния на взаимоотношения математики с интеллектуальной и индустриальной деятельностью человека является математическое образование. Несомненно, что и материальные средства имеют для нас значение, но если индустрия будущего будет жертвовать на поощрение математики столь же щедро, как это делают теперь частные лица и правительства, то наши тревоги на этот счет скоро прекратятся.

Но прежде всего следует осознать, что математическое образование прошлого потерпело решительную неудачу в установлении таких связей между математикой, различными науками и техникой, которые представляются нам теперь совершенно необходимыми. В целом, математические достижения этого столетия мало затронули математическое образование, исключая подготовку к ученой степени. Пока это остается так, все усовершенствования обучения будут, главным образом, технического или педагогического характера. Наиболее серьезным препятствием модернизации математической программы является утилитарный дух, пропитывающий среднюю школу и определяющий характер преподавания учеными приложений математики в различных областях, где она используется. Так как учащихся в средней школе научили представлять математику скорее в аспекте ее применений, чем в ее формальной и логической полноте, то они приходят в колледж с математическими способностями скорее притупленными, чем обострен-

ными и усиленными, как следовало бы. Их и далее поощряют к усвоению утилитарного взгляда на математику, в частности, трактовкой, временами ошибочной, с которой они встречаются в почти каждом избираемом ими техническом или научном курсе. Вследствие этого попытки преподавать должным образом математический анализ или ввести в программу элементы современной алгебры часто возмущают студентов и вызывают критику других кафедр.

Несмотря на эти трудности, некоторый прогресс достигнут. Тем не менее, необходимо добиться гораздо большего, прежде чем можно будет считать, что американская математика находится на прочных и здоровых позициях. Ибо слова Фрэнсиса Бэкона, цитированные выше, несомненно, применимы к данному случаю: «Если вы захотите, чтобы дерево приносило больше плодов чем обычно, вам нечего делать с его ветвями, а нужно взрыхлить землю и подложить новую почву под корни»!

*(Перевод с английского Л. А. Маркушевич
под редакцией А. И. Маркушевича)*

НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная в n -мерном евклидовом пространстве R_n ($n \geq 2$). Обозначим через $F(x, r)$ среднее значение функции f , вычисленное по поверхности шара с центром в точке x и радиусом r , т. е. значение интеграла $\int_{\Sigma} f(x) d\sigma$, распространенного по поверхности Σ n -мерного шара

$[d\sigma$ — элемент $(n-1)$ -мерной «площади» этой поверхности], деленного на полную площадь поверхности Σ . Известно, что гармонические функции можно определить тем их свойством, что среднее значение $F(x, r)$, вычисленное по любой поверхности шара, равно значению $f(x)$ в центре шара [см. «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 246].

Недавно французский математик Дельсарт (J. Delsart) обнаружил, что каждая функция, значение $f(x)$ которой в каждой точке равно среднему значению этой функции, вычисленному по поверхности лишь **двух** шаров с центром в этой точке, уже обязательно будет гармонической. А именно, с оговоркой, о которой будет сказано ниже, имеет место

Теорема: если для каких-либо двух чисел a и b и для всякого $x \in R_n$ имеет место равенство

$$F(x, a) = F(x, b) = f(x),$$

то функция $f(x)$ — гармонична в R_n .

Оговорка. Теорема может перестать быть справедливой, если отношение $\frac{a}{b}$ принимает некоторые исключительные значения. Эти исключительные значения могут быть наперед указаны, независимо от функции f .

Имеется только конечное число таких исключительных значений. В случае, когда $n=3$, их не существует.

Эскиз доказательства этой теоремы дан в заметке, напечатанной в 246-м томе Докладов Французской академии наук (Comptes Rendus), 1958, стр. 1358.

А. Л.

К ВОПРОСУ О РЕФОРМЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

От редакции

Публикуемые ниже статьи «О содержании курса математики в средней школе» В. Г. Болтянского, Н. Я. Виленкина и И. М. Яглома и «Некоторые вопросы преподавания математики в средней школе» В. И. Левина печатаются в порядке обсуждения¹⁾. Авторы этих статей ставят ряд важных и интересных вопросов, относящихся к содержанию, характеру и методам преподавания математики в школе. Основная цель статей — указать недостатки в сложившемся преподавании, вскрыть их природу и предложить средства для их устранения²⁾.

Первая из этих статей ставит целью обосновать целесообразность радикальной реформы программ путем перестройки школьных курсов математики и обновления их содержания. Вторая статья останавливается преимущественно на характере преподавания математики в школе выступая против неоправданного стремления к словесной строгости и в защиту развития активного, творческого начала. Хотя обе статьи написаны независимо, они проникнуты единым духом критического отношения к сложившимся традициям и в известной мере дополняют одна другую.

Эти статьи не следует рассматривать как проекты методических и программных документов, как не следует и критиковать их за то, что в них не сказано, не учтено и не подсчитано. Это, скорее, «размышления вслух» научных работников-математиков о том, что их не удовлетворяет ныне в школьной математике и какой они хотели бы ее видеть.

¹⁾ Началом такого обсуждения являются две реплики, печатаемые в настоящем выпуске.

²⁾ Некоторое представление о характере относящейся сюда дискуссии за рубежом читатели «Математического просвещения» могут получить по предыдущим выпускам (вып. 2, стр. 253 и вып. 3, стр. 213).

В связи с этими статьями представляет известный интерес в качестве информационного материала статья В. Г. Ашкин узе «Об учебниках математики для средней школы Германской Демократической Республики», публикуемая в этом же выпуске.

Предлагаемые статьи были написаны их авторами до принятия и публикации «Закона об укреплении и связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР». Поэтому в них речь идет о ныне существующей 10-летней школе, и нет прямого и непосредственного ответа на основной вопрос, вызываемый необходимостью предстоящей перестройки этой школы: как должно отразиться укрепление связи школы с жизнью в содержании и методах преподавания математики? Этот вопрос требует особого и серьезного обсуждения.

Редакция полагает всё же, что в этом обсуждении предлагаемые статьи будут небесполезны, так как их основная направленность — выделить тот круг элементарных идей, понятий и фактов математики, которые являются наиболее значительными с точки зрения современной науки и техники, и отбросить в школьном курсе всё то, что имеет второстепенное значение или просто устарело.

О СОДЕРЖАНИИ КУРСА МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин, И. М. Яглом

(Москва)

1. Основные положения

Основное содержание настоящей статьи составляет ее вторая часть — ориентировочная программа курса математики в средней школе. Разумеется, *полноценная* программа не может быть составлена кабинетным образом — здесь необходимо широкое обсуждение научной и педагогической общественностью; необходим продолжительный и широко поставленный эксперимент; наконец, самая лучшая программа не принесет пользы, если нет приуроченных к ней учебников (причем создание хороших учебников также требует длительного обсуждения и проверки в классе). Однако вся эта большая работа должна начинаться с обсуждения некоторых основных положений; положения станут еще яснее, если их не декларировать в абстрактной форме, а проиллюстрировать на примерной программе.

Необходимость реформы преподавания математики в средней школе бесспорна. Хотя в XX веке математика не претерпела изменений, которые было бы необходимо отразить в *школьных* программах, но за эти годы далеко вперед шагнули физика и химия, биология и техника; за эти годы изменили свое лицо промышленность и сельское хозяйство; в нашей стране во много раз увеличилась сеть высших учебных заведений, возросло количество студентов. Теперь студенты покидают вузы совсем не с теми знаниями по математике, как до революции: если в то время, скажем, вопрос о равномерной непрерывности функций считался одним из самых тонких, какие могут встретиться в магистерских (кандидатских) экзаменах, то теперь студент первого курса университета, не умеющий правильно ответить на этот вопрос, получает оценку «неудовлетворительно». А вот *приходят* в вузы будущие студенты почти с теми же знаниями по математике, что и сто лет тому назад!

С другой стороны, характер современного преподавания далеко не соответствует интересам и тех школьников, которые идут со школьной скамьи не в вузы, а на производство. Все это требует пересмотра существующих программ и установок по целому ряду предметов и, в первую очередь, по предметам физико-математического цикла. Некоторые шаги

в этом направлении предприняты в настоящее время: добавлены практические работы по различным разделам курса математики, в программу десятого класса предполагается включить элементы математического анализа. Однако сделанные изменения совершенно недостаточны. Более того, полумеры могут лишь скомпрометировать самую идею введения элементов математического анализа в среднюю школу, ибо эти элементы не могут являться каким-то привеском к старой программе, а должны служить логическим завершением школьного курса математики.

Для того чтобы понятие производной (и интеграла: вряд ли стоит ограничиться лишь одной из двух основных операций «высшей математики») было в курсе средней школы логически и методически осмысленно, необходима полная, коренная перестройка всего этого курса, начиная с курса 5-го класса, необходим перевод всего преподавания на «функциональные рельсы». Подобная реформа значительно облегчается, по нашему мнению, наличием превосходного учебника алгебры для 6—7 классов средней школы, целиком пропитанного функциональной точкой зрения, — мы имеем в виду «Начальную алгебру» В. Л. Гончарова¹⁾.

В первую очередь необходимо изменить создавшееся положение, когда курс алгебры состоит из двух разнородных частей: с одной стороны, основ буквенного исчисления и теории уравнений (линейных, квадратных, иррациональных и т. д.), а с другой — отрывочных сведений о некоторых функциях. Точно так же следует преодолеть традиционное отделение изучения тригонометрических функций от изучения остальных функций. Единственный выход из этого положения мы видим в *ликвидации самостоятельного учебного предмета — тригонометрии*²⁾ и *создании нового предмета — теории функций*. В этот предмет должно войти изучение линейной, квадратичной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций³⁾. Логическим завершением этого предмета и явится изучение элементов математического анализа.

Разумеется, содержащиеся в курсе тригонометрии геометрические предложения должны найти свое место в соответствующих разделах курса геометрии. Алгебра должна заканчиваться в восьмом классе и содержать основы буквенного исчисления и теорию уравнений (включая комплексные числа).

При подобной планировке весь курс школьной математики станет более цельным и более легким для усвоения. Кроме того, он будет

¹⁾ См. рецензию Г. Б. Гуревича на этот учебник, напечатанную в 1-м выпуске «Математического просвещения» (стр. 243—250).

²⁾ Предложение о ликвидации тригонометрии как самостоятельного учебного предмета в свое время выдвигалось многими учеными, интересовавшимися положением дел в средней школе, — профессорами А. Я. Хинчиным, Я. С. Дубновым, А. И. Маркушевичем и другими (см., например, статью Я. С. Дубнова в 1-м выпуске «Математического просвещения», стр. 45—56). В то же время серьезных и заслуживающих внимания возражений против этого предложения сделано не было.

³⁾ Мы считаем недопустимым анахронизмом изучение функций $y = \sin x$ и $y = a^x$ или $y = \log_a x$, в рамках двух различных школьных предметов. (Кстати, хорошо известна тесная связь этих функций в комплексной области.)

более обоснованным с научной точки зрения, так как три предмета школьного курса математики являются естественным введением в изучение трех разделов «высшей математики» — алгебры, геометрии и анализа.

Правда, при переходе на предлагаемую нами программу школьникам не придется решать экзотических уравнений и находить геометрические прогрессии, обладающие тем свойством, что после вычитания из их членов заданных чисел они превращаются в арифметические; не надо будет также искать «тот член бинома Ньютона, который не содержит x , если сумма первого и третьего коэффициентов равна заданному числу». Однако никому из занимающихся математикой и ее приложениями не приходится сталкиваться с задачами такого типа. Что же касается *комбинаторики*, которая также не включается в программу, то она может иметь серьезное значение лишь как введение в учение о вероятностях, а включение элементов теории вероятностей в массовую школу, по-видимому, еще несвоевременно.

Сказанное выше указывает основные направления предлагаемой здесь перестройки алгебры и тригонометрии; остается еще только сказать о геометрии. Здесь мы также считаем совершенно недопустимым положение, существовавшее до самого последнего времени. Преподавание геометрии в школе всегда находилось под очень большим влиянием евклидовских традиций, которые можно было считать передовыми разве что 2000 лет назад. Необходимо отказаться от «строго логического» курса геометрии в 6-м классе (тем более, что на самом деле этот курс никогда не был логически корректным) и начинать преподавание геометрии как *естественно-научной дисциплины*, т. е. вначале не давать «строгих» доказательств очевидным предложениям, «которые кажутся до доказательства яснее, нежели после такового» (А. Н. Крылов)¹⁾, и шире использовать геометрический эксперимент. При этом основные геометрические понятия должны быть школьнику известны еще из курса 5-го класса; это поможет разгрузить содержание предмета геометрии от псевдонаучных «определений». Постепенно можно увеличивать число доказательств с тем, чтобы изложение в старших классах вошло в принятые сейчас «строгие рамки»; однако само слово «аксиома» и понятие об аксиоматическом методе, причем не только в геометрии, следует отложить на самый конец курса. Очень желательно насытить геометрию материалом, связанным с геометрическими преобразованиями; при этом введение изучения простейших аффинных преобразований (сжатие к прямой) позволяет ввести в курс геометрии понятие об эллипсе, с которым до сих пор учащиеся знакомились и в курсе астрономии (законы Кеплера) и в курсе черчения, но не на уроках математики²⁾ — положение, которое вряд ли является нормальным!

¹⁾ См. «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 172.

²⁾ Напомним, что существующая программа по математике предусматривает ознакомление учащихся с гиперболой (график обратной пропорциональности) и с параболой, но не с эллипсом.

Отметим, что эллипс — не единственное математическое понятие, с которым школьники знакомятся не на уроках математики. Еще более недопустимым является отсутствие в курсе математики понятия о *векторах*, играющих столь большую роль в физике. Введение этого понятия позволит упростить изложение ряда вопросов геометрии; это благотворно скажется и на курсе физики (работа как скалярное произведение двух векторов!). Вообще в современной школе связь между математикой и физикой далеко недостаточна и является односторонней: следует резко увеличить в курсе математики число задач с физической фабулой, а в некоторых случаях использовать физические соображения как метод доказательства.

Следует усилить также связь между отдельными предметами математического цикла. Надо повести решительную борьбу против погони за «чистотой» геометрического метода, широко привлекая при решении задач и при выводе формул методы алгебры и тригонометрии. Необходимо включить в курс средней школы понятие о координатном методе в геометрии — вряд ли следует модернизировать курс лишь за счет элементов математического анализа, пренебрегая столь важной дисциплиной, как аналитическая геометрия. Принятое существующей программой включение метода координат только в курс алгебры приводит к прямым курьезам — в настоящее время выпускники средней школы знают уравнения таких сложных линий как гипербола или парабола, но не знакомы с формулой для расстояния между двумя точками и с уравнением окружности даже в его простейшей форме $x^2 + y^2 = r^2$.

Таковы общие тенденции перестройки школьного курса математики, конкретизированные в приведенной ниже программе. Мы не касаемся здесь вопросов об общей реформе средней школы, например о дифференциации обучения в старших классах; однако, принимая во внимание существующие тенденции, мы позаботились о том, чтобы курс первых восьми классов представлял собой некоторое законченное целое («1-й концентр» обучения математике). Программа детализирована примерно в той же степени, что и принятая сейчас программа Главного управления школ Министерства просвещения РСФСР. При этом, разумеется, остаются нераскрытыми весьма многие конкретные вопросы, лишь частично продуманные нами; однако, ответить на все вопросы могут лишь учебник и задачник к нему, но не программа. При расчете числа часов мы также исходили из существующей сетки часов; при этом наши *указания о числе часов, отводимых на тот или иной раздел, являются условными* — они в первую очередь преследуют цель пояснить наши взгляды на соотношение отдельных частей курса и на сокращения, которые допускает принятая сейчас система изложения материала¹⁾.

¹⁾ Отметим для примера, что на раздел «Прямые и плоскости в пространстве» мы отводим, при сохранении почти всего проходимого сейчас материала, меньшее чем в действующей программе число часов.

Некоторые конкретные замечания о школьной программе — как существующей сейчас, так и предлагаемой — мы дадим в третьей части статьи.

II. Программа по математике

Число часов по математике в 5—10 классах:

Предмет	5 кл.	6 кл.	7 кл.	8 кл.	9 кл.	10 кл.
Арифметика ¹⁾	165	33	—	—	—	—
Геометрия	33	77	66	80	66	99
Алгебра	—	88	132	118	—	—
Теория функций	—	—	—	—	132	99

5 класс.— Геометрия

Пропедевтический курс (33 ч.). Ознакомление с фигурами квадрат, прямоугольник, ромб, треугольник, круг, эллипс. — 2) Углы. Перпендикуляр. Параллельные линии. Задачи на разрезание и складывание. Упражнения со складыванием листа бумаги. — Чертежные инструменты: линейка, циркуль, угольник, линейка с параллельными краями, транспортир. — Многогранники и круглые тела: куб, параллелепипед, призма, пирамида, шар, конус, цилиндр. Проволочные модели. Развертки куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды, склеивание цилиндра и конуса. — Измерения и вычисления на местности. Рулетка. Разбивка эллиптической клумбы.

6 класс

Алгебра

1) Отрицательные числа (15 ч.). Понятие об отрицательном числе. Числовая ось. Абсолютная величина числа. Алгебраическая сумма. Сложение и вычитание алгебраических сумм, правило раскрытия скобок. Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел. Умножение и деление. Арифметические задачи с отрицательными данными или ответами, их истолкование.

2) Формулы, пропорции, графики (25 ч.). Задачи с буквен-

Геометрия

1) Углы и отрезки. Симметрия относительно прямой (15 ч.). Равенство и неравенство углов и отрезков; прямой, острый и тупой углы (повторение). — Перегибание листа бумаги, симметрия. Свойство перпендикуляра, проведенного через середину отрезка. Свойство биссектрисы угла. Свойства перпендикуляра и наклонных; единственность перпендикуляра. Свойства равнобедренного треугольника. Отвес и уровень. Угольник и линейка.

2) Треугольники (22 ч.). Построение треугольника по трем сторонам; признак равенства (по трем

¹⁾ Раздел «Арифметика» в настоящей программе не развернут; в третьей части статьи приведены некоторые замечания о содержании этого предмета.

²⁾ Здесь и дальше знак «тире» в тексте программы отделяет один круг вопросов от другого.

ными данными. Формулы и их числовые значения. Законы действий. Порядок действий и употребление скобок.—Квадрат числа. Составление таблиц.—Графики и их построение. Прямая и обратная пропорциональная зависимость, их графики (прямая и гиперболы). Нахождение коэффициента пропорциональности по двум значениям.

3) **Линейная алгебра** (48 ч.). Коэффициент. Приведение подобных членов. Сложение и вычитание линейных многочленов.—Равенство и его свойства. Уравнения и системы линейных уравнений.—Основное свойство линейной функции. График линейной функции. Графическое решение одного линейного уравнения с одним неизвестным. Графическое решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.—Задачи на составление и решение линейных уравнений.

сторонам). Жесткость треугольника и нежесткость шарнирного четырехугольника; примеры из практики (кронштейн и др.). Условия возможности построения треугольника по трем сторонам.—Построение угла, равного данному. Деление угла пополам.—Построение треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними, а также по стороне и двум прилежащим углам. Еще два признака равенства треугольников.—Прямоугольные треугольники (построение и признаки равенства).

3) **Параллельность** (14 ч.). Основное свойство параллельных (аксиома о параллельных). Существование общих перпендикуляров у параллельных. Свойства углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой (прямая и обратная теоремы). Построение параллельных прямых линейкой и угольником.—Сумма углов треугольника (доказательство теоремы и экспериментальная проверка). Теорема о внешнем угле треугольника.

4) **Четырехугольники** (20 ч.). Четырехугольники и их классификация, выпуклость. Сумма углов четырехугольника. Свойства параллелограммов, ромбов, прямоугольников, квадратов. Трапеция. Построения линейкой с параллельными краями.

5) **Практические занятия на местности** (6 ч.).

7 класс

Алгебра

1) **Приближенные вычисления и логарифмическая линейка** (25 ч.). Запись результатов приближенного измерения. Отбрасывание излишних знаков.—Абсолютная и относительная погрешность (измерения). Сложение и вычитание приближенно вычисленных величин; оценка погрешности. Умножение и деление. Решение примеров на действия с приближенными значениями; оценка числа верных знаков.—Логарифмическая линейка. Умножение и деление чисел с помощью линейки. О точности, которую может дать линейка. Составление таблицы квадратов чисел с помощью линейки.

Геометрия

1) **Измерение отрезков** (5 ч.). Приближенность всякого измерения. Приближенное (десятичное) измерение отрезков. Отношение отрезков, независимость от выбора единицы измерения. Возможность судить о равенстве отношений по результатам приближенного вычисления.

2) **Площади многоугольников** (12 ч.). Понятие о площади. Приближенное вычисление площадей фигур с помощью миллиметровой бумаги. Площадь поперечного сечения реки (с выездом за город для промеров). Свойства площадей.—Площадь прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции.—Теорема Пифа

2) Квадратные корни (13 ч.). Задача о вычислении стороны квадрата, имеющего данную площадь. Свойства квадратного корня (корень из дроби и произведения, внесение и вынесение множителей). Составление таблицы корней с двумя знаками: а) с помощью таблицы квадратов, б) с помощью линейки. Оценка погрешности при извлечении квадратного корня.

3) Тождественные преобразования квадратичных трехчленов (20 ч.). Умножение алгебраической суммы на число. Раскрытие скобок в выражениях $a(x+b)$, $x(x+b)$. Перемножение двух (линейных) многочленов: $(x+a)(x+b)$. Частные случаи: $(x+a)^2$, $(x-a)^2$, $(x+a)(x-a)$. Интерпретация этих формул с помощью площадей. Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена. — Алгоритм вычисления квадратных корней.

4) Квадратные уравнения. График квадратного трехчлена (38 ч.). Неполные квадратные уравнения. Решение приведенных квадратных уравнений дополнением до квадрата. Формула решения приведенных уравнений. Общая формула решения. — Решение задач на составление квадратных уравнений. — График квадратного трехчлена. Графическое решение квадратного уравнения. — Разложение квадратного трехчлена на множители. Формулы Виета. Число корней квадратного уравнения; дискриминант; графическое пояснение.

5) Буквенное исчисление (36 ч.). Степень, показатель степени. Умножение степеней одного и того же основания. Одночлены и многочлены. Приведение подобных членов. Сложение и вычитание многочленов. Умножение одночленов. Умножение многочлена на одночлен. Умножение многочленов. Квадрат одночлена. Формулы сокращенного умножения (квадрат суммы и разности алгебраических выражений, разность квадратов).

гора (доказательство с разрезанием квадрата). — Разбиение любого многоугольника на треугольники.

3) Подобие треугольников и многоугольников (17 ч.). Подобные треугольники. Лемма о подобии. Признаки подобия треугольников. — Свойства средней линии треугольника и трапеции. Решение задач. — Отношение периметров и площадей подобных многоугольников.

4) Окружность (32 ч.). Окружность и связанные с ней понятия (повторение). Зависимость между хордами и дугами, между дугами и центральными углами. — Свойство диаметра, перпендикулярного к хорде (прямая и обратная теоремы), свойство дуг, заключенных между параллельными хордами. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная. Теорема о радиусе, проведенном в точку касания; обратная теорема. Взаимное расположение двух окружностей. — Вписанные углы и их измерение. Сегмент, вмещающий данный угол. — Построение окружности, вписанной в треугольник, и окружности, описанной около треугольника.

8 класс

Алгебра

1) Степени и корни (42 ч.). Умножение одночленов и многочленов, умножение степеней (повторение).

Геометрия

1) Тригонометрические функции (17 ч.). Тригонометрические функции острого и тупого угла.

Возведение степени в степень. Деление степеней и отрицательные показатели. Четная и нечетная степени отрицательного числа.— Задача о вычислении корня. Применение таблиц. Обозначение корня как степени с дробным показателем. Формулировка принципа о сохранении всех законов действий для дробных показателей, проверка на частных случаях. Действия над выражениями, содержащими дробные показатели.— Графики степенных функций.— Простейшие иррациональные уравнения. Причины появления посторонних корней.

2) Алгебраические дроби (40 ч.). Разложение на множители (вынесение за скобки и применение формул).— Основное свойство дроби, сокращение.— Приведение дробей к общему знаменателю, сложение и вычитание.— Умножение и деление дробей.— Упражнения на все действия с дробями.— Решение уравнений с дробями.

3) Уравнения и системы уравнений высших степеней (20 ч.). Система уравнений первой степени и второй степени. Применение метода подстановки при решении простейших уравнений и систем высших степеней.— Действия над расположенными многочленами. Деление на двучлен $x - a$. Метод неопределенных коэффициентов и схема Горнера. Деление разности степеней на разность оснований. Теорема Безу. Решение уравнений.

4) Комплексные числа (16 ч.). Определение комплексных чисел и действия над ними (в алгебраической и тригонометрической формах). Комплексные корни алгебраических уравнений и формулировка основной теоремы алгебры.

Нахождение значений тригонометрических функций по таблицам и с помощью логарифмической линейки.— Решение прямоугольных треугольников. Высота прямоугольного треугольника. Основные соотношения между тригонометрическими функциями.

2) Векторы (18 ч.). Определение вектора. Умножение вектора на число. Сложение и вычитание векторов. Проекция вектора на ось. Свойства проекций. Координаты вектора.— Произведение векторов (скалярное), его свойства и вычисление в координатах.— Решение задач.

3) Метрические соотношения в треугольнике (17 ч.). Теоремы косинусов и синусов. Решение произвольных треугольников. Формула Герона. Решение задач.

4) Метод координат (22 ч.). Уравнение прямой линии. Параллельные и перпендикулярные прямые. Пересечение прямых и исследование линейных уравнений.— Расстояние между двумя точками.— Окружность и ее центр. Пересечение прямой и окружности, двух окружностей. Простейшие геометрические места.

5) Практические занятия на местности (6 ч.). Определение недоступных расстояний и высоты предметов с помощью решения треугольников. Определение координат точек на местности и составление карты земельного участка, определение площадей земельных участков.

9 класс

Теория функций

1) Прогрессии (10 ч.). Общее понятие последовательности. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена и суммы.— Физические задачи, приводящие к геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия, формула общего члена и суммы.

Геометрия

1) Многоугольники (10 ч.). Сумма углов n -угольника. Правильные многоугольники. Стороны, диагонали, периметр, площадь правильного многоугольника (выражение в функции от r). Правильные треугольник, четырехугольник, шестиугольник.

2) Действительные числа (7 ч.). Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Понятие об иррациональных числах, десятичные приближения чисел. Действительные числа и действия над ними.

3) Переменные величины, функции и графики (15 ч.). Физические и геометрические примеры переменных и постоянных величин. Монотонность изменения величины. Функциональная зависимость и способы ее задания. Графики простейших функций (повторение), четность и нечетность.

4) Показательная и логарифмическая функции. Логарифмы (32 ч.). Некоторые физические задачи, приводящие к степеням с произвольным показателем (радиоактивный распад и др.). Понятие о степени с иррациональным показателем. Показательная функция, ее свойства и график. — Понятие об обратной функции; график обратной функции. — Задачи, приводящие к нахождению показателя. Логарифм. Логарифмическая функция, ее свойства и график. — Логарифм произведения, частного, степени, корня. Логарифмирование и потенцирование алгебраических выражений. Десятичные логарифмы. Таблицы логарифмов. Принципы устройства логарифмической линейки. — Простейшие показательные и логарифмические уравнения.

5) Тригонометрические функции (68 ч.)

а) (23 ч.). Радианное измерение углов. Определение тригонометрических функций, их свойства и графики. Функция $A \sin(\omega x + \varphi)$. Гармоническое колебание. Периодичность тригонометрических функций.

б) (15 ч.). Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Формулы приведения. — Доказательство тождеств и решение уравнений.

в) (30 ч.). Теоремы сложения для тригонометрических функций. Функции двойного и половинного угла. — Преобразование суммы и разности синусов (косинусов). Рациональное выражение тригонометрических функций через $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$.

2) Геометрические преобразования (23 ч.). Примеры решения задач на построение, в которых нужно как-либо преобразовать заданную или искомую фигуру. — Симметрия относительно прямой. Параллельный перенос. Задачи. — Симметрия относительно точки. Вращение. Задачи. — Понятие о движении. — Подобное преобразование (гомотетия). Теорема об отношении высот и других линейных элементов подобных фигур. Длина окружности и дуги окружности; число π . Решение задач методом подобия. — Сжатие к прямой. Эллипс как результат сжатия круга. — Роль геометрических преобразований в геометрии.

3) Прямые и плоскости в пространстве (33 ч.). Точки, прямые и плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей (пересекающиеся, скрещивающиеся и параллельные прямые; пересекающиеся и параллельные прямая и плоскость; пересекающиеся и параллельные плоскости). — Перпендикулярные прямые и плоскости. Прямая, перпендикулярная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. — Угол между прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями. — Параллельная проекция и ее свойства; применение к решению задач. Ортогональная проекция. Понятие о методе Монжа.

10 класс

Теория функций

1) Неравенства (10 ч.). Неравенства. Основные свойства неравенств. Сложение и вычитание неравенств.— Решение неравенств 1-й и 2-й степени с одним неизвестным.

2) Пределы (15 ч.). Физические и геометрические примеры, приводящие к понятию предела.— Предел переменной. Принцип вложенных отрезков. Свойства пределов (без доказательства, с пояснениями). Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии.— Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел функции. Вычисление пределов.

3) Понятие производной (16 ч.). Приращение функции. Выражение для приращений функций $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$.— Средняя скорость движения. Разностное отношение. Мгновенная скорость. Производная.— Производные функций $y=e^x$, $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$. Производная от суммы и разности; производная многочлена.

4) Понятие интеграла (15 ч.). Работа переменной силы. Нахождение пути по скорости. Определенный интеграл. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона—Лейбница. Интегрирование многочленов.

5) Дифференцирование функций (20 ч.). Производная произведения и частного. Производная от x^n , где n —целое; от x^a , где a —рациональное. Производные тригонометрических функций. Понятие о числе e и о натуральных логарифмах, производная показательной и логарифмической функции.

6) Приложения производной (23 ч.). Бином Ньютона.— Задача о проведении касательной. Нахождение максимумов и минимумов. Задачи. График затухающего колебания.— Уравнения радиоактивного распада и гармонического колебания.

Геометрия

1) Многогранники (28 ч.). Куб и параллелепипед; ребра, грани, диагонали; теорема о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда.— Прямая и наклонная призма. Перпендикулярное сечение наклонной призмы. Правильная призма и ее элементы.— Пирамида. Правильная пирамида и ее элементы. Разбиение трехугольной призмы на три пирамиды. Усеченная пирамида.— Решение задач с применением тригонометрии.

2) Тела вращения (20 ч.). Цилиндр, конус, шар и их свойства. Сечения цилиндра и шара. Эллипс как сечение цилиндра, развертка срезанного цилиндра. Усеченный конус.— Вписанные и описанные шары, цилиндры и конусы.

3) Вычисление поверхностей и объемов (31 ч.). Поверхность куба и параллелепипеда. Поверхность (боковая и полная) призмы, пирамиды и усеченной пирамиды.— Общее понятие о вычислении длин, площадей и объемов; связь с интегрированием.— Площадь круга. Поверхность (боковая и полная) цилиндра, конуса и усеченного конуса.— Объем параллелепипеда. Объем призмы и цилиндра. Объем пирамиды и конуса, усеченной пирамиды и усеченного конуса.— Поверхность и объем шара.

4) Заключительные замечания к курсу математики (20 ч.). Вопрос о происхождении математических понятий. Аксиомы, теоремы и определения в алгебре и геометрии. Опытное происхождение аксиом. Понятие об аксиоматическом методе.— Исторический обзор развития математики. Развитие понятия о числе и о пространстве. Роль математики в практической деятельности людей. Развитие вычислительных средств (счетные машины).

III. Замечания к программе

Мы ограничимся лишь некоторыми, более существенными на наш взгляд вопросами.

При существующей в настоящее время программе по алгебре учащийся должен постичь огромное количество правил и формул буквен-

ного исчисления прежде, чем он начинает всерьез решать уравнения и применять их. В результате учащийся успевает зачастую возненавидеть эту кажущуюся ему сухой и бесполезной науку, прежде чем он сталкивается с ее применениями. У учащихся создается впечатление, что математика не только не составляет могучее орудие познания природы, а просто есть какое-то толчение воды в ступе.

Поэтому в предлагаемой программе в 6-м классе рассматриваются только линейные операции (сложение, вычитание, коэффициент, приведение подобных членов). Исключением является лишь понятие квадрата, также вводимое здесь ввиду его применений в геометрии. Это позволяет уже в 6-м классе решать линейные уравнения и системы линейных уравнений и, следовательно, применять алгебру к решению ряда задач. Кроме того, в курс 6-го класса вводятся элементы графического изображения величин и зависимости между величинами (в большем объеме, чем в существующей программе). С одной стороны, это необходимо для подготовки учащихся к курсу теории функций, а с другой стороны, такая перестройка диктуется задачей усиления связи школы с жизнью. Представителям разнообразных профессий (рабочим, зоотехникам, механизаторам, врачам и т. д.) не придется в своей практической деятельности делить многочлен на многочлен, но придется решать простейшие уравнения, графически изображать различные величины (выработку, температуру больного и т. д.).

Этим же задачами диктуется внедрение в курс средней школы вопросов приближенных вычислений, обучение счету на логарифмической линейке и т. д. В то же время детальное изучение логарифмических таблиц не нужно, так как на практике вычисления с этими таблицами теперь редко применяются. Как видно из программы, вычисления с помощью логарифмической линейки предлагается ввести до логарифмов и теоретического обоснования действий на линейке. Разве неумение сделать топор мешает плотнику успешно им пользоваться?

В предлагаемой программе почти не затрагивается вопрос о равносильности уравнений. Сколько-нибудь подробное рассмотрение этого вопроса в средней школе является методической нелепостью¹⁾. Ведь, право же, обучая ребенка правилам перехода улиц, надо предупредить его о возможности попасть под автомобиль, но совсем не нужно останавливаться на особенностях машин той или иной марки.

Отметим также, что в существующей программе недостаточно увязаны курсы алгебры и геометрии — решение систем алгебраических уравнений оторвано от соответствующих геометрических представлений, тема о пропорциях — от темы о подобии и т. д. В предлагаемой программе алгебра и геометрия более тесно связаны друг с другом; в частности, параллельно с прохождением в алгебре темы об уравнениях высших степеней изучаются элементы аналитической геометрии,

¹⁾ Наша точка зрения по этому вопросу совпадает с точкой зрения В. Л. Гончарова. См. «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 245.

тема об измерении отрезков и площадей изучается параллельно с темой о приближенных вычислениях и т. п.

Курс алгебры по предлагаемой программе заканчивается в 8-м классе, — этим преодолевается существующая в настоящее время многопредметность.

Далее, как видно из программы, число часов, отводимых в 5-м и 6-м классах на арифметику, уменьшается. В 5-м классе предлагается ввести (за счет часов, отводимых на арифметику) пропедевтический курс геометрии (33 часа). Польза такого курса очевидна. Теперь учителю приходится тратить много сил, чтобы научить учащегося 6-го класса представлять себе (и даже чертить) простейшие геометрические фигуры, чтобы создать у учащегося минимальное количество представлений, необходимых для того, чтобы начать построение содержательной теории и чтобы эти представления хоть немного устоялись. При обучении же по предлагаемой программе учащийся будет приходить в 6-й класс с уже устоявшимися представлениями, с умением делать чертежи, легко отличать прямые углы, как угодно расположенные, от тупых и острых углов и т. п.

За счет чего предлагается взять эти 33 часа для курса геометрии в 5-м классе? Прежде всего за счет «задач с геометрическим содержанием», включенных в действующую сейчас программу 5-го класса. Во-вторых, за счет курса теоретической арифметики (законы арифметических действий, распространение их на дроби и т. д.), который совершенно не доступен двенадцатилетнему ребенку. В общей сложности это дает, правда, несколько меньше, чем 33 часа, необходимые для пропедевтического курса геометрии, но несколько недостающих часов можно, конечно, сэкономить из 198-часового курса арифметики (или, в крайнем случае, можно несколько уменьшить число часов, отводимых на курс геометрии в 5-м классе).

На арифметику предполагается оставить в 6-м классе только 33 часа. Это объясняется тем, что тема о пропорциях и пропорциональном делении полностью передается алгебре.

Пропедевтический курс геометрии предполагается совершенно *наглядным*, без какого бы то ни было логического анализа вводимых понятий, без доказательств, аксиом и точных определений, хотя, конечно, некоторое количество рассуждений и выводов предполагается.

Изложение *строгого* курса геометрии в 6-м классе, в частности попытка объяснить 13-летнему ребенку, только что начавшему изучать геометрию, что такое аксиома, теорема, определение (!!), это — полный абсурд при преподавании геометрии в массовой школе. Понять это способны лишь немногие, очень одаренные дети. В программе предусмотрено продолжение наглядного пропедевтического курса 5-го класса. В 6-м классе вводятся лишь немногие элементы строгости и рассуждений. Все аксиомы вводятся лишь неявно без акцентировки, без слова «аксиома», при подчеркивании опытного характера этих предложений. Различие между «математическими линиями» и практически

вычерчиваемыми линиями не делается до конца 10-го класса, когда дается понятие об аксиомах, определениях и об аксиоматическом методе в математике (именно в математике, а не только в геометрии). Вместе с тем *теоремы* вводятся, но не все доказательства являются логическими выводами из аксиом. «Чистота» доказательств достигается лишь постепенно, к старшим классам. Основная мысль заключается в том, что геометрия есть *опытная* наука; доказательства же и рассуждения позволяют систематизировать эту науку, легче получить ее выводы (чем постоянно экспериментировать), позволяют избежать необходимых погрешностей в вычислениях. Иначе говоря, геометрия как наука, рассматривается как теоретический вывод из практической деятельности.

Перестановки в прохождении материала по сравнению с действующей программой объясняются стремлением дать сначала наиболее *легкий* материал. В частности, тема о четырехугольниках — одна из наиболее легких в программе; тема о подобии и о площадях значительно легче и понятнее, чем тема о задачах на построение и о вписанных и других углах, связанных с окружностью¹⁾. Поэтому мы оставляем минимум задач на построение и совсем не включаем задач на доказательство, а вводим сначала темы, в которых имеется много задач на вычисление (т. е. наиболее легких задач). Вместе с тем, подобие ближе располагается к теме о пропорциях.

Заканчивается курс геометрии вычислением поверхностей и объемов с помощью интегрирования²⁾. Аксиомы *впервые* упоминаются в заключительном разделе курса десятого класса (проходимом после окончания курса геометрии), где дается представление об аксиоматическом методе. Этот заключительный раздел имеет целью расширить математический кругозор учащихся, основные формы занятий здесь — беседа и лекция.

Программа по теории функций не требует подробного комментария. Она составлена из соответствующих разделов существующих программ (тригонометрические, показательная и логарифмическая функции, прогрессии) и элементов математического анализа. Отметим лишь, что изучение этого курса должно быть теснейшим образом связано с естественнонаучными приложениями математики.

¹⁾ Достаточно сказать, что формулировка «вписанный угол измеряется половиной дуги...» вряд ли до конца ясна среднему учащемуся; что значит «измеряется»? — на этот вопрос не многие учащиеся смогут ответить.

²⁾ Вывод формулы объема пирамиды с помощью «чертовой лестницы», как и «пифагоровы штаны» в курсе восьмого класса кажутся нам анахронизмами.

ОБ ОДНОМ «РУССКОМ СПОСОБЕ» УМНОЖЕНИЯ

Так в книжке W. Ahrens «Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik» (Berlin, 1918) называется следующий способ умножения целых чисел, который, как утверждает автор, «нередко употребляется среди русских крестьян и в коммерческих подсчетах». Чтобы вычислить произведение a на b , последовательно делим a на 2 и умножаем b на 2, причем в случае, когда делимое есть число нечетное, берем соответствующее неполное частное (делим с остатком). Например, если $a=37$, $b=54$, получаем:

37	54
18	108
9	216
4	432
2	864
1	1728

Теперь, чтобы получить произведение, остается сложить те числа правого столбца, слева от которых стоят нечетные числа:

$$37 \cdot 54 = 54 + 216 + 1728 = 1998.$$

Всегда ли этот способ приводит к верному результату?

А. М.

ЭДГАР ПО О КВАДРАТНОМ УРАВНЕНИИ

Известный американский писатель Эдгар По получил высшее математическое образование (он был артиллерийским офицером). В одном из своих рассказов он тонко подметил одно из тех заблуждений, которые распространены в широкой публике из-за неверного понимания истинного смысла математических формул.

Я никогда не встречал математика, который не держался как бы за Символ Веры за то, что $x^2 + px + q$ абсолютно и безусловно равно нулю. Скажите одному из этих джентльменов, если Вам угодно, в виде опыта, что, на Ваш взгляд, могут существовать случаи, когда $x^2 + px + q$ не целиком равно нулю, и втолковав ему то, что Вы разумеете, возможно скорее спасайтесь из пределов его досягаемости, так как, без сомнения, он попытается Вас поколотить.

Э. По, Украденное письмо,
пер. К. Д. Бальмонта.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В. И. Левин

(Москва)

Наша средняя школа сохранила в преподавании математики многое из методического наследия старой школы. На протяжении первых 20—25 лет существования Советского государства было много исканий и смелых предложений, рассматривались проекты новых программ, коренным образом менявших облик и содержание школьного курса математики. Однако в последние десятилетия мы всё же вернулись в основном к старым программам и методам преподавания — были учтены лишь важнейшие требования современности и массовый характер обучения в средней школе. Таким образом, коренной перестройки преподавания математики в школе не получилось.

Однако бурное развитие всех отраслей техники в последнее десятилетие и связанный с этим новый этап в развитии математики как науки начинают действительно влиять на школу. Наступило время серьезного пересмотра содержания школьного обучения, причем начать следует с критического анализа материала программы сложившегося в настоящее время школьного курса математики. Такая работа у нас уже ведется, и мы остановимся на ней только вскользь, уделив основное внимание методам преподавания.

Обращаясь к *отбору преподаваемого материала*, нужно отметить, что с точки зрения новых требований в школе наша действующая программа по математике содержит много такого, что не имеет серьезного теоретического и практического значения. Сюда относится часть теоретического материала (в частности, многие классические задачи на построение), ряд вопросов, связанных с прогрессиями, так называемое «исследование» уравнений, точные решения специальных классов уравнений (так называемых «показательных», «логарифмических» и в особенности «тригонометрических» уравнений) и др. В школе уделяется слишком много внимания фактам и методам, не имеющим значения для практической деятельности в любой области и даже не применяемым математиками в их живой работе.

Если архаизм некоторой части материала современной программы нашей школы постепенно ликвидируется как уступка новым веяниям,

то несовершенство методов преподавания математики всё еще держится и очень тормозит его реорганизацию.

Мы остановимся на двух положениях: 1) *курс математики в школе призван развивать логическое мышление учащихся* и 2) *изложение математики должно быть строгим*. По существу эти положения бесспорны, но их неправильное понимание ведет к главным методическим ошибкам в преподавании математики.

Остановимся на первом из этих положений. Не следует, на наш взгляд, считать, что самую главную роль в развитии логического мышления учащегося играет привитие ему навыков аксиоматического изучения предмета, в частности геометрии.

Трудно согласиться с тем, что аксиоматический метод, столь важный в современной математике, должен быть в каком бы то ни было виде внесен в школьное преподавание математики. В науке аксиоматизация никогда не являлась первоначальным этапом познания. *Аксиоматизируется нечто уже известное*. Аксиоматизация является анатомическим исследованием уже готовой структуры понятий и теорем, наведением специфического «порядка» в этой структуре, выявлении основных предпосылок, не подлежащих обоснованию в рамках этой теории, но достаточных для формально-логического вывода всех положений теории и не содержащих «ничего лишнего» в этом смысле. Трудности аксиоматического исследования состоят в умении различать в *известном вообще* то, что *известно уже* на основании аксиом, т. е. выведено из них, и то, что еще в этом смысле *неизвестно*. Это — такой этап математического развития, при котором уже предполагается известным аксиоматизируемый материал; на этом этапе требуется чрезвычайно высокая степень абстракции. Аксиоматика арифметики, например, проходит в педагогических институтах и требует там больших усилий даже от студентов старших курсов (усилий, которые полностью окупаются математическим развитием будущих учителей). То же можно сказать об аксиоматике геометрии в курсе оснований геометрии, входящем в учебный план пединститутов и университетов. Однако *в школе* аксиоматике даже (и тем более!) несовершенной — совсем не место, она способна только запутать учащихся и помешать созданию в их представлении правильных понятий.

На каком-то этапе школьный курс математики, конечно, немаловажен без достаточно строгих доказательств. Однако их должно быть не слишком много, и они *не являются* основным рычагом развития логического мышления учащихся. Доказательства в школьной математике должны *убеждать* в верности результата, а не являться в глазах учащихся каким-то навязанным ритуалом. Они должны отправляться от очевидного (имеется в виду интуитивно очевидное для ученика) и приводить к неочевидному (в частности, такого рода доказательствами являются выводы формул, которые важны также для развития техники оперирования с математической символикой).

Поэтому ни полуаксиоматическое построение школьной геометрии в евклидовских традициях, ни перегрузка курса доказательствами не развивают логического мышления учащихся. Курс математики должен развивать это мышление на посильном, понятном материале, главным образом *задачного* характера. Самостоятельное решение задач, начиная с арифметических задач начальной школы вплоть до задач на составление уравнений, осмысливание немногочисленных простых доказательств — вот основной тренировочный материал для логического мышления. Он имеется в существующем курсе, но в недостаточном объеме, и упор в развитии логического мышления делается теперь не на нем, а на вещах, которые затрудняют учащихся, и это даже тормозит их математическое развитие.

Что касается строгости изложения математики в школе, то в этом вопросе нередко встречается ригористическая, подчас даже схоластическая точка зрения, тем более вредная, что она пропагандируется в большом числе методических статей по школьному курсу математики. Этот ложный ригоризм в школьной математике наносит ущерб глубокому пониманию учащимися широких математических понятий и методов, подменяя их всестороннее раскрытие перечислением всевозможных исключительных случаев, так или иначе ограничивающих общность рассматриваемых случаев.

В качестве примеров можно привести вопрос о решении алгебраических уравнений и систем таких уравнений, где уделяется излишне большое внимание понятию равносильности и исключительным значениям параметров, входящих в эти уравнения, при которых качественно меняется характер уравнений и систем. Сюда же относится подробное исследование уравнений. Гипертрофирование таких рассмотрений приводит к тому, что учащиеся начинают смотреть на математический метод с опаской и недоверием, ожидая на каждом шагу какого-либо подвоха, и за всеми этими предосторожностями теряют перспективу в отношении общности и мощи изучаемых методов. Не говоря уже о том, что «вероятность» необходимости применять такого рода оговорки и предостережения равна нулю (как, например, в случае отдельных изолированных исключительных значений параметров в непрерывном множестве их всевозможных значений), математический аппарат тем и силен, что в большинстве таких случаев он сам наталкивает на необходимое видоизменение результата.

Если в квадратном уравнении коэффициенты зависят от одного параметра, причем старший коэффициент обращается в нуль при одном значении этого параметра (а коэффициент при первой степени при этом значении не нуль), то нужно ли каждый раз требовать от учащихся, чтобы они при решении уравнения обязательно оговаривали отличие параметра от исключительного значения и ограничивались этим? Не лучше ли дать им понять, что при этом значении один из двух корней перестает существовать, поскольку уравнение превращается в линейное, а второй становится корнем этого линейного урав-

нения? Я бы даже не побоялся им сказать, что один корень «уходит в бесконечность» в том смысле, что при значениях параметра, близких к исключительному, этот корень становится очень большим по абсолютной величине. Такое функциональное рассмотрение значительно плодотворнее, чем сухая формальная констатация неприменимости формулы решения в исключительном случае, фактически скрывающая от учащихся важный факт и оставляющая их в недоумении. Легко провести приближенное вычисление корней при нескольких, близких к исключительному, значениях параметра; это представляет собой хорошую пропедевтику понятия предела (бесконечного для одного корня и конечного для другого). Такое насыщение алгебраических рассмотрений функциональным содержанием чрезвычайно оживляет изучаемый материал, дает возможность строить нетривиальные графики и развивать мысль учащихся именно в нужном направлении.

Рассмотренный пример является далеко не единственным в области алгебры, и тем более геометрии, но он ясно указывает предлагаемое направление перестройки материала в этом вопросе.

Конечно, учащимся должны быть разъяснены основные ограничения применимости того или иного математического положения, но эти ограничения *не должны выдвигаться на первый план и заслонять существо дела*. Акцент всегда должен быть на положительном, конструктивном в математике, а в настоящее время это далеко не всегда делается.

Ригористический подход к математике в средней школе, наблюдаемый в современном школьном преподавании, происходит, по-видимому, из-за того, что сами учителя иногда недостаточно свободно владеют математическим материалом и убеждены, что «настоящая» математика характеризуется в первую очередь именно словесной строгостью рассуждений и непримиримым ригоризмом. Такие представления, к сожалению, культивируются некоторыми статьями в нашей периодической и неперiodической методической печати¹⁾.

Как всякий перегиб, это очень вредно для дела математического образования подрастающего поколения. Это в значительной степени выхолащивает математику и затрудняет творческий подход к овладению началами математики. Учащиеся в результате не получают такого математического развития, при котором они были бы в состоянии самостоятельно разобраться в небольших осложнениях, возникающих при использовании математического аппарата. При этом надо учесть, что

¹⁾ Сюда, в частности, относятся работы, в которых авторы настаивают на сугубо формализованном исследовании уравнений и систем и пропагандируют внедрение в школьное преподавание тонких (и в то же время пустых!) вопросов о равносильности уравнений с примерами типа: $x=0$ и $x+\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}$, призванными доказать право на существование соответствующих «теорем»; отметим также и некоторые работы по преподаванию элементов математического анализа в средней школе. Существуют и другие проявления вредной словесной строгости в математике.

творческие возможности учащихся даже в младшем возрасте, как показывают современные психологические исследования, часто недооцениваются, развитие этих творческих возможностей не культивируется и даже тормозится неправильной постановкой преподавания. Это во многих случаях отталкивает учащихся от математики и создает неуспеваемость там, где ее может не быть.

Есть еще одно положение, которое характеризует современное состояние преподавания математики в нашей школе как не совсем удовлетворительное.

Все практические приложения математики так или иначе упираются на последнем этапе в приближенные вычисления. Известная фраза о «доведении результата до числа» содержит требование, без выполнения которого математический метод теряет в своей практической значимости и силе. Это справедливо, начиная с элементарнейших приложений, до самых сложных проблем. Учащиеся, воспитанные на задачах, решаемых в «круглых» числах или, во всяком случае, допускающих «замкнутые», точные решения, и тренированные на точных построениях с помощью циркуля и линейки, естественно, оказываются беспомощными перед любой практической задачей даже в том случае, когда они в состоянии сформулировать ее в математических терминах и формально решить. С одной стороны, подавляющее большинство прикладных вопросов вообще не допускает точного решения (взять хотя бы задачи, приводящие к простым трансцендентным уравнениям или алгебраическим уравнениям высоких степеней), а с другой стороны, часто точные решения (и точные построения) оказываются настолько громоздкими, что для практических целей они бесполезны.

Поэтому культура приближенных (в том числе графических) вычислений должна развиваться в школе на всех этапах прохождения математики. Кое-что в этом направлении сейчас в школе делается, но делается эпизодически, бессистемно и без определенной большой цели¹⁾. А эта цель ясна и важна: необходимо прививать навыки приближенных вычислений и обучать методам приближенного, главным образом, графического решения уравнений (без разделения их на алгебраические и трансцендентные, а последние — на показательные, логарифми-

¹⁾ Показательными в этом отношении являются данные, приведенные недавно на страницах «Математического просвещения» (вып. 1, 1957, стр. 191—192). На XIX школьной математической олимпиаде в МГУ ученикам 10-х классов в первом туре была предложена простая задача (№ 2), сформулированная в терминах приближенных вычислений и по существу являющаяся задачей на приближенные вычисления. Из 40 учащихся ее решил один, двое дали решения с несущественными ошибками, пять дали неверные решения (но содержащие верные идеи), и 32 ученика либо решили ее принципиально неверно, либо вовсе не приступали к ее решению. Другие задачи из этого тура, несомненно, более трудные, дали значительно лучшие результаты, причем обращает на себя внимание тот факт, что задача геометрического содержания была правильно (или почти правильно) решена большинством участников олимпиады (24 из 40).

ческие и тригонометрические). Необходимо, чтобы математический аппарат в руках учащихся ожил и давал ощутимые практические результаты, начиная от арифметики и кончая элементами математического анализа. Зачем учащемуся уметь решать сложные так называемые «тригонометрические» уравнения, если он не в состоянии самым грубым образом указать корень уравнения $x^5 = x + 5$ или составить себе приблизительную картину корней уравнения $5 \cos x = x$?

Указанные недостатки в преподавании математики в нашей средней школе, к сожалению, еще усугубляются, и их ликвидация отдалается неверной направленностью упоминавшихся уже методических исследований последнего времени. Чаще всего они пытаются в рамках школьного курса математики завершить то, что для полного выяснения требует более глубоких понятий¹⁾. Эти исследования не только не помогают учителям в их практической работе и не направляют их мысли по нужному для школы руслу, но, наоборот, вносят сумятицу в математически ясные вопросы и отвлекают методическую мысль от насущных проблем школы.

¹⁾ Примерами являются иррациональные уравнения (теория алгебраических функций комплексного переменного), понятие иррационального числа, исследование уравнений (алгебраические функции). Сюда же относятся ненужные и лженаучные споры об определении тригонометрического уравнения, «периода тригонометрического уравнения» и т. п.

РЕПЛИКИ

1. Не изгонять из школы идей аксиоматического метода

Допустимо ли, чтобы молодой человек, вступающий в практическую жизнь после школьного обучения, не был осведомлен о важнейших современных проблемах физики, биологии или других разделов естествознания?

Несмотря на очевидные трудности, с которыми сопряжено обучение подрастающего поколения новейшим достижениям науки, школьное преподавание не может отмахнуться от этой задачи. Совместными стараниями ученых и педагогов должна быть создана такая программа, должны быть разработаны такие методы обучения, которые обеспечивают уровень школьного преподавания, соответствующий требованиям современной жизни.

Мы не думаем, что авторы обеих статей, напечатанных выше, не согласятся с этим. Программа, предлагаемая В. Г. Болтянским, Н. Я. Виленкиным и И. М. Ягломом, и методические установки, высказываемые В. И. Левиным, вдохновлены их уверенностью в том, что необходимо сломать многие установившиеся традиции, чтобы всемерно приблизить школьное преподавание к требованиям сегодняшнего дня.

И именно потому мы не можем пройти мимо того пренебрежения к одной из важнейших сторон современной математики, которое, к нашему большому удивлению, мы встретили в обеих статьях: речь идет о знакомстве учащихся средней школы с идеями *аксиоматического построения геометрии*.

«Трудно согласиться с тем, что аксиоматический метод, столь важный в современной математике, должен быть в каком бы то ни было виде внесен в школьное преподавание...»

«В школе аксиоматике, даже (и тем более!) несовершенной — совсем не место», —

говорит В. И. Левин.

«Само слово „аксиома“ и понятие об аксиоматическом методе — причем не только в геометрии — отложить на самый конец курса» —

вот какое скромное место и какие запоздалые сроки предлагают В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин и И. М. Яглом.

Нам кажется, что авторы этих высказываний ошибаются, отказываясь от рассмотрения этой трудной методической задачи. Практика

преподавания геометрии в советской средней школе за последнее время показывает, что ни ученые, ни педагоги не показали широкому кругу учителей математики путей ее решения: десятистраничное «дополнение» к многолетнему курсу геометрии ¹⁾ не может (даже если бы оно было написано более тщательно) заменить постепенного, хорошо продуманного *воспитания*. А без этого воспитания нет возможности, начав в 6-м классе изучение геометрии как «опытной науки», помочь учащемуся выявить (в 7-м и 8-м классах) основные законы этой опытной науки (первоначальная точка зрения на аксиомы геометрии) и использовать их для логического предсказания ее менее очевидных закономерностей с тем, чтобы (в последних двух классах) раскрыть перед школьником картину геометрии как абстрактной науки.

Нам кажется, что новая программа и новые методические предложения должны обеспечить и эту сторону математического обучения, хотя бы уже потому, что только отчетливое понимание факта: *«наряду с геометрией как опытной наукой существует еще и абстрактная геометрия»* — дает возможность подлинного (а не столь распространенного словесного) понимания самого замысла геометрии Лобачевского — т. е. идеи, подлинное знакомство с которой должно быть обеспечено для каждого культурного человека.

Небольшые размеры нашей реплики не дают нам возможности указать на многие другие (впрочем, очевидные для каждого математика) причины, по которым необходимо знакомить школьников с сущностью аксиоматического метода в современной науке ²⁾. Мы хотели бы только еще сказать, что воспитание школьника, о котором мы говорим, должно осуществляться не только при преподавании геометрии, но и алгебры.

Программная и методическая разработка мероприятий, необходимых для выполнения этой трудной, но важной цели, представляется нам неотложной задачей работников науки и школы.

И. Н. Бронштейн, А. М. Лопшиц

2. О роли математики в среднем образовании

Публикуемые выше статьи В. Г. Болтянского, Н. Я. Виленкина и И. М. Яглома и В. И. Левина посвящены важнейшим вопросам о требованиях, которые надлежит предъявить к преподаванию математики в средней школе. Авторы исходят из совершенно правильной точки зрения о необходимости коренного улучшения преподавания математики и приближения курса математики к требованиям жизни. Вполне разделяя в основном точку зрения авторов, я считаю необходимым внести большую ясность в сущность поднятых вопросов и выразить несогласие с некоторыми из точек зрения, высказанных авторами этих статей.

¹⁾ См., например, «Дополнение — Об аксиомах геометрии» в учебнике А. П. Киселева «Геометрия», М., 1956, стр. 91—101.

²⁾ О некоторых из этих причин говорит в своей реплике А. А. Ляпунов.

1. Необходимо рассматривать преподавание математики под углом зрения организации среднего образования в целом, имея в виду, прежде всего, *настоятельную необходимость разделения старших классов по меньшей мере на три типа: физико-математический профиль, сельскохозяйственный профиль и гуманитарный профиль.*

2. Рассматривая объем математических знаний, который средняя школа должна давать своим выпускникам, нужно исходить из тех категорических требований, которые предъявляет современная жизнь к гражданам нашей страны, и стараться суметь *предвидеть* требования, которые предъявит жизнь поколениям современных школьников, когда они станут взрослыми.

3. В такой постановке решение вопроса о характере курса математики в средней школе далеко не просто. Я надеюсь выступить с изложением своей точки зрения на этот вопрос в дискуссионном порядке в одном из ближайших выпусков «Математического просвещения». Сейчас я ограничусь лишь некоторыми соображениями:

а) Характерной особенностью развития человеческой культуры на протяжении XX века является широкая экспансия математической мысли в самые различные сферы интеллектуальной деятельности. В то же время в основных чертах современная школьная программа по математике сложилась еще в прошлом веке. Она *катастрофическим образом отстаёт от требований современной жизни.*

б) Необходимо начинать с перестройки преподавания в младших классах. Решение задач содержательного характера, подобранных применительно к возрасту и уровню развития учащихся, должно начинаться с самого начала изучения математики. Технические навыки не должны быть единственной целью обучения на протяжении первых трех-четырех лет. Соответственно курс арифметики должен заканчиваться в четвертом классе. Искусственные, архаические методы решения арифметических задач должны быть изъаты из школы. Алгебра должна начинаться не позднее 5-го класса, причем буквенные обозначения следует вводить эвристическим путем при решении задач, так же, впрочем, как и расширение понятия о числе, и лишь позднее вводить формальные правила оперирования с буквенными выражениями. Думаю, что *либо в последнем классе общей средней школы, либо в первом из расщепленных старших классов средней школы целесообразно дать аксиоматическое изложение основ элементарной алгебры.*

в) Аналогичным образом целесообразно строить и курс геометрии. Вначале (4-й класс) следует на уроках арифметики использовать интуитивное представление о площадях и объемах и решать арифметические задачи с геометрическим содержанием. Позднее необходимо постепенно увеличивать объем интуитивных геометрических знаний, всё время подкрепляя их задачами. Не позднее чем *с начала расщепления старших классов необходимо дать систематический курс геометрии на аксиоматической основе.*

г) В старших классах необходим раздел учения о функциях, который должен включить в себя тригонометрию, логарифмы, основы дифференциального и интегрального исчисления¹⁾.

д) Необходим раздел «Элементы вычислительной математики»²⁾, включающий в себя представления о приближенных вычислениях, различные системы счисления, элементарные сведения о вычислительных приборах (счеты, логарифмическая линейка, номограммы, арифмометр) и о вычислительных машинах, *включая элементы программирования и основы математической логики.*

Этот последний раздел совершенно необходим для физико-математической средней школы.

Если у кого-нибудь возникнет вопрос о загруженности школьников и о недостатке учебного времени, то я предложу ему положить стопкой на стол школьные учебники и обязательные учебные пособия по истории и литературе. Думаю, что разумное сжатие этой стопки позволит найти время для математики.

В заключение я хочу подчеркнуть, что проблема организации физико-математического образования имеет первостепенное значение для таких вопросов, как *автоматизация управления производством в массовых масштабах, как темпы технического прогресса и обороноспособность страны.*

А. А. Ляпунов

¹⁾ В этом я полностью согласен с В. Г. Болтянским, Н. Я. Виленкиным и И. М. Ягломом.

²⁾ В этом я согласен с В. И. Левиным и считаю его требования даже преуменьшенными.

II. НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТКОВ РЯДОВ С РЕКУРРЕНТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Х. М. Коган

(Москва)

В настоящей заметке предлагается метод для получения оценок остатков рядов вида

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e_n, \quad (1)$$

где коэффициенты q_n образуют рекуррентную последовательность ¹⁾:

$$q_n = \sum_{i=1}^r a_i q_{n-\beta_i} \quad (2)$$

(β_i — целые положительные числа). Метод заключается в замене общего выражения коэффициентов q_n их асимптотическим выражением \tilde{q}_n , после чего общий член ряда (1) упрощается. Для получения этого асимптотического выражения используется аппарат известного метода Д. Бернулли решения алгебраических уравнений. В заключение приводится пример, взятый из теории электроразведки, на котором предлагаемый метод был практически испробован.

В дальнейшем везде полагаем, что $|a_i| \leq 1$, $|q_n| \leq 1$, $e_n > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} e_n < +\infty$.

1. Характеристическое уравнение конечно-разностного уравнения (2) имеет вид:

$$t^n - \sum_{i=1}^r a_i t^{n-\beta_i} = 0. \quad (3)$$

¹⁾ О рекуррентных последовательностях и об уравнениях в конечных разностях см. А. И. Маркушевич, Возвратные последовательности, М.—Л., 1950; А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952.

Для упрощения изложения будем считать, что корни уравнения (3) являются простыми. Найдя корни этого уравнения, получаем общее выражение коэффициентов q_n :

$$q_n = \sum_{k=1}^p c_k t_k^n \cos(n\omega_k + \varphi_k), \quad (4)$$

где $p = \max \{\beta_{il}\}$ есть порядок уравнения (2). Некоторые из значений c_k , t_k , ω_k , φ_k могут оказаться равными нулю или единице. Равенство нулю некоторых из значений ω_k равносильно тому, что соответствующие корни уравнения (3) вещественны; поэтому мы не выделяем случая вещественных корней для отдельного рассмотрения.

Обозначим корни уравнения (3) в порядке убывания их абсолютных величин:

$$|t_1| > |t_2| > \dots > |t_j|,$$

где $j \leq p$. Тогда

$$q_n = c_1 t_1^n \cos(n\omega_1 + \varphi_1) + c_2 t_2^n \cos(n\omega_2 + \varphi_2) + \dots \\ \dots + c_p t_p^n \cos(n\omega_n + \varphi_n) = c_1 t_1^n \{\cos(n\omega_1 + \varphi_1) + \alpha_n\},$$

где введено обозначение:

$$\alpha_n = \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^n \cos(n\omega_2 + \varphi_2) + \dots + \frac{c_p}{c_1} \left(\frac{t_p}{t_1}\right)^n \cos(n\omega_p + \varphi_p).$$

Оценим абсолютную величину α_n :

$$|\alpha_n| \leq \left|\frac{c_2}{c_1}\right| \cdot \left|\frac{t_2}{t_1}\right|^n + \dots + \left|\frac{c_p}{c_1}\right| \cdot \left|\frac{t_p}{t_1}\right|^n \leq c(p-1) \left|\frac{t_2}{t_1}\right|^n,$$

где $c = \max \left\{ \left| \frac{c_p}{c_1} \right| \right\}$. Очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; с другой стороны, имеем

$\cos(n\omega_1 + \varphi_1) \neq 0$, и при $n \rightarrow \infty$ $\cos(n\omega_1 + \varphi_1)$ не стремится к нулю (как, впрочем, и ни к какому другому пределу). Следовательно, в выражении

$$q_n = c_1 t_1^n \{\cos(n\omega_1 + \varphi_1) + \alpha_n\} \quad (4')$$

величина в фигурных скобках асимптотически стремится к функции $\cos(n\omega_1 + \varphi_1)$, а коэффициент q_n — к асимптотическому выражению

$$\tilde{q}_n = c_1 t_1^n \cos(n\omega_1 + \varphi_1).$$

При заданной точности вычислений всегда можно указать такое N , что при $n \geq N$ модуль разности $q_n - \tilde{q}_n$ станет меньше половины величины последнего десятичного знака. Так как при этом совпадают практически вычисляемые (с принятой точностью вычислений) ряды $\sum_{n=N}^{\infty} q_n e_n$ и $\sum_{n=N}^{\infty} \tilde{q}_n e_n$, то можно ограничиться оценкой второго из этих рядов, что мы в дальнейшем и делаем.

Таким образом, выражение (4) заменяется более простым выражением

$$\tilde{q}_n = ct^n \cos(n\omega + \varphi), \quad n \geq N, \quad (5)$$

где постоянные c , t , ω , φ зависят от наибольшего по модулю корня уравнения (3). При $t=1$ или при $\omega=0$ (случай, когда наибольший по модулю корень — вещественный) выражение еще более упрощается.

Описываемый в п. 2 метод построения выражений типа (5) автоматически выделяет требуемую асимптотику, оставляя без внимания перестояющие сказываться (в условиях принятой точности вычислений) члены выражения (4).

2. Для построения выражения \tilde{q}_n нет необходимости полностью решать уравнение (3), что при больших p представило бы практически трудную задачу. Входящие в выражение \tilde{q}_n числа c , t , ω , φ довольно просто находятся при помощи метода, использующего идею метода Д. Бернулли¹⁾. Необходимая для этого последовательность коэффициентов q_n ($n=1, 2, \dots, N-1$) всегда имеется в готовом виде, так как она участвует в непосредственном вычислении частичной суммы

$$\sum_{n=1}^{N-1} q_n e_n \text{ ряда (1).}$$

Отличие от метода Д. Бернулли в его обычном виде состоит в том, что вместо искусственно подобранной «шкалы отношения»²⁾ используется готовая последовательность q_n и что нас интересует не сам по себе наибольший по модулю корень уравнения (3), а связанные с ним постоянные c , t , ω , φ . Для определения этих постоянных можно использовать последние из вычисленных значений q_n .

Практическая сторона применения метода Д. Бернулли описана Эйткином, Эльтерманом и в ряде других работ³⁾. Приведенные там формулы могут быть приспособлены к рассматриваемому нами случаю. Они особенно полезны, если предварительно неизвестно, какова кратность корней, вещественны они или комплексны. Однако иногда вид выражения \tilde{q} можно установить из физических соображений, и тогда удается находить постоянные коэффициенты, входящие в это выражение более просто. Вот как это можно сделать в случае (5).

Введем обозначения $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \gamma_n$, $\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} = \gamma_{n+1}$ и т. д.; получаем

$$\frac{\cos[(n+2)\omega + \varphi]}{\cos[n\omega + \varphi]} = \frac{\gamma_n \gamma_{n+1}}{t^2}.$$

¹⁾ Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, М.—Л., 1936, гл. 17.

²⁾ Там же.

³⁾ А. С. Айткен, On Bernoulli's Numerical Solution of Algebraic Equations, Proc. Royal Soc. of Edinb., 1925—1926, 46, № 3, стр. 289—305; Н. Эльтерман, Die Lösung algebraischer und transzendenten Gleichungen mit Hilfe von rekursiven Folgen, ZAMM, 1952, 32, № 8/9, стр. 231—232.

Прибавим к обеим частям этого равенства единицу. После несложных преобразований получим:

$$2 \frac{\cos [(n+1)\omega + \varphi]}{\cos [n\omega + \varphi]} \cos \omega = \frac{\gamma_n \gamma_{n+1}}{t^2} + 1,$$

откуда

$$\frac{1}{2 \cos \omega} \left(\frac{\gamma_n \gamma_{n+1}}{t^2} + 1 \right) = \frac{\gamma_n}{t},$$

или

$$\frac{1}{2 \cos \omega} = \frac{t \gamma_n}{\gamma_n \gamma_{n+1} + t^2} = \frac{t \gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} \gamma_{n+2} + t^2}$$

(так как в левой части этого выражения отсутствует n). Из последней пропорции получаем

$$t^2 = \frac{\gamma_n \gamma_{n+1} (\gamma_{n+1} - \gamma_{n+2})}{\gamma_n - \gamma_{n+1}},$$

вслед за чем сразу получается $\cos \omega$.

Числа C и φ легко находятся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} n\omega + \varphi &= \arccos \frac{q_n}{ct^n}, \\ (n+1)\omega + \varphi &= \arcsin \frac{q_{n+1}}{ct^{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для определения четырех постоянных формулы (5) использованы четыре последовательных члена последовательности q_n .

В случае, если наибольший по модулю корень уравнения (3) кратен (или в случае равенства нескольких корней по модулю), то выражения для \tilde{q}_n получаются более сложными, чем (5), но в способе определения постоянных соответствующей формулы принципиально ничего не меняется. Если же о кратности корней ничего неизвестно, то лучше всего пользоваться формулами Эйткина, получить нужные корни и затем составить выражение \tilde{q}_n .

3. После того как выражение для \tilde{q}_n построено, задача сводится к изучению ряда

$$\sum_{n=N}^{\infty} \tilde{q}_n e_n, \quad (7)$$

для чего в зависимости от вида коэффициентов e_n могут быть применены различные приемы.

Так, если $\sum_{n=N}^{\infty} e_n^2$ известно и удастся вычислить $\sum_{n=N}^{\infty} \tilde{q}_n$, то можно использовать формулу Коши — Буняковского. В частности, в случае выра-

жения (5) получаем:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \tilde{q}_n^2 = \frac{1}{2} c^2 t^{2N} \left\{ \frac{1}{1-t^2} + \frac{\cos 2(N\omega + \varphi) - t^2 \cos 2[(n-1)\omega + \varphi]}{1 - 2t^2 \cos 2\omega + t^4} \right\}. \quad (8)$$

4. Применим изложенные соображения к частному случаю, когда коэффициенты e_n имеют вид

$$e_n = \frac{2r^3}{(4n^2 + r^2)^{3/2}} \quad (9)$$

или

$$e'_n = \frac{r^5}{(4n^2 + r^2)^{5/2}}. \quad (9')$$

Ряды вида (1) с такими e_n приходится суммировать при вычислении координат теоретических кривых электрического [выражение (9)] и дипольного [выражение (9')] зондирования, используемых геофизиками при интерпретации результатов полевых геофизических измерений¹⁾. При больших значениях параметра r эти ряды сходятся очень медленно, и применение излагаемой методики оказывается уместным.

Изучением этих рядов занимался Г. С. Салехов²⁾, который, используя неравенство $|q_n| \leq 1$, свел дело к рассмотрению ряда $\sum_{n=N}^{\infty} e_n$, для которого и дал свои оценки. Так как при этом не учитывалась функциональная структура коэффициентов q_n , то эти оценки оказались чрезвычайно завышенными в конкретных случаях.

Так, для остатка ряда $\sum_{n=N}^{\infty} q_n e_n$ (а вернее, для ряда $\sum_{n=N}^{\infty} e_n$) при $n=450$, $r=128$ Г. С. Салехов дает оценку $1,278^3$). Оценка с помощью формулы Коши — Буняковского для некоторой последовательности q_n вида (5) с произвольно выбранными постоянными

$$q_n = 0,8 \cdot 0,99^n \cdot \cos(18^\circ \cdot n)$$

для $N=400$, $r=128$ дает

$$\sum_{n=400}^{\infty} q_n e_n \leq \sqrt{\sum_{n=400}^{\infty} q_n^2 \cdot \sum_{n=400}^{\infty} e_n^2} \approx 0,005,$$

¹⁾ А. И. Заборовский, Электроразведка, 1943; Л. М. Альпин, Дипольные зондирования, 1950.

²⁾ Г. С. Салехов, Вычисление рядов, М., 1955, стр. 104—106.

³⁾ См. там же, табл. 1; так как Г. С. Салехов коэффициент (9) везде пишет без двойки в числителе, то его оценка нами удвоена.

а в более неблагоприятном случае $q_n = 0,999^n$ получается оценка $\sum_{n=400}^{\infty} q_n e_n \leq 1,05$. Здесь сумма $\sum_{n=400}^{\infty} q_n^2$ вычислялась по (8), а $\sum_{n=400}^{\infty} e_n^2$ была получена по формуле Эйлера.

Если в выражении (5) $t=1$, то ряд $\sum_{n=N}^{\infty} q_n^2$ расходится, и воспользоваться формулой Коши — Буняковского нельзя. Но в этом случае наличие асимптотической формулы для коэффициентов q_n открывает путь для непосредственного приближения остатка ряда (1).

Описанная задача была поставлена Л. М. Альпиным в 1949 г. Изложенные здесь результаты практически применялись в 1950 г.

ОБОБЩЕНИЯ ИЗОТОМИЧЕСКОГО И ИЗОГОНАЛЬНОГО СООТВЕТСТВИЙ

О. А. Котий

(Ярославль)

1. Две теоремы плоской геометрии. Исходным пунктом настоящей заметки служат две хорошо известные теоремы геометрии треугольника.

Теорема 1¹⁾. Если прямая l пересекает стороны треугольника ABC в трех точках A_1, B_1, C_1 (рис. 1), то точки A'_1, B'_1, C'_1 , симметричные точкам A_1, B_1, C_1 относительно середин A_{02}, B_{02}, C_0 соответствующих сторон, лежат на одной прямой l' .

Эта теорема позволяет каждой прямой l плоскости сопоставить новую прямую l' . Соответствие между прямыми l и l' называется *изотомическим*. Изотомическое соответствие, очевидно, является взаимным (инволюционным) и, вообще говоря, однозначным; исключением в этом последнем отношении являются стороны треугольника ABC , так как для них соответствующие прямые не определяются однозначно²⁾.

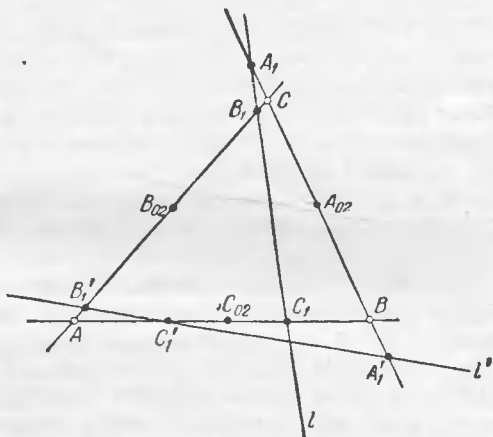


Рис. 1.

¹⁾ См., например, С. И. Зетель, Новая геометрия треугольника, М., 1940, стр. 62, или Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, М., 1957; Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, М., 1952, задача 138а.

²⁾ Последний факт связан с тем, что изотомическое соответствие не является линейным. Это — простейший пример квадратичного соответствия прямых, т. е. такого, что однородные координаты прямой l' аналитически выражаются квадратичными формами от однородных координат прямой l .

Теорема 2¹). Если в плоскости треугольника ABC дана точка M (рис. 2), то прямые AM' , BM' , CM' , симметричные прямым AM , BM , CM относительно биссектрис углов A , B , C треугольника, пересекаются в одной точке M' (или параллельны между собой).

Эта теорема позволяет в плоскости треугольника установить точечное соответствие $M \leftrightarrow M'$, которое называется *изогональным*.

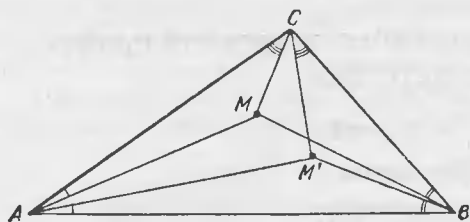


Рис. 2.

Изогональное соответствие также инволюционно и однозначно; исключение составляют вершины треугольника ABC ²).

Обе теоремы обнаруживают сходство друг с другом; ясен двойственный характер этих теорем (точки и прямые в обеих теоремах меняются ролями). Однако стро-

гое установление двойственности между этими теоремами появляется только после того, как их удастся переформулировать в терминах проективной геометрии. При этом соответствующие проективные теоремы будут более общими: в качестве специализаций из них можно будет получить не только теоремы 1 и 2, но и аналогичные теоремы неевклидовой геометрии.

В заключение мы рассмотрим вопрос о перенесении полученных результатов на n -мерное пространство.

2. Проективные аналогии. Заметим, что фигурирующая в теореме 1 симметрия относительно середины C_{02} стороны AB есть инволюция на прямой AB (т. е. инволюционное проективное преобразование прямой). Эта инволюция определяется парой (A, B) и двойной точкой C_{02} ; другая двойная точка является несобственной. То же самое имеет место и на двух других сторонах треугольника ABC . Заметим еще, что несобственные двойные точки трех инволюций коллинеарны.

Эти предварительные замечания подсказывают изменения, которые нужно произвести в формулировке теоремы 1, чтобы она стала справедливой в проективной плоскости. Для краткости, систему трех инволюций на сторонах треугольника, для которых вершины являются соответственными парами точек, а три двойные точки (по одной на каждой стороне) коллинеарны, мы будем обозначать через I_3 .

Теорема 3. Если на сторонах трехсторонника задана какая-нибудь система инволюций I_3 и прямая l пересекает стороны

¹) См. С. И. Зетель, стр. 61 или Д. О. Шклярский и др., задача 1396.

²) Здесь мы имеем пример квадратичного (кремонова) соответствия. Образом прямой является кривая второго порядка, проходящая через вершины треугольника ABC .

трехсторонника в трех точках A_1, B_1, C_1 , то три соответствующие им в системе I_3 точки A'_1, B'_1, C'_1 лежат на другой прямой l' .

Таким образом, шесть точек $A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$ лежат по три на двух прямых l и l' . Более общей, однако, является следующая теорема:

Теорема 4. Три пары соответственных точек системы I_3 (по одной паре на каждой стороне) лежат на кривой второго порядка¹⁾.

Доказательство. Пусть $(A_3, A_4), (B_3, B_4), (C_3, C_4)$ — три пары соответствующих точек системы I_3 , а коллинеарными двойными точками этой системы являются точки A_{01}, B_{01}, C_{01} . Используя обобщенную

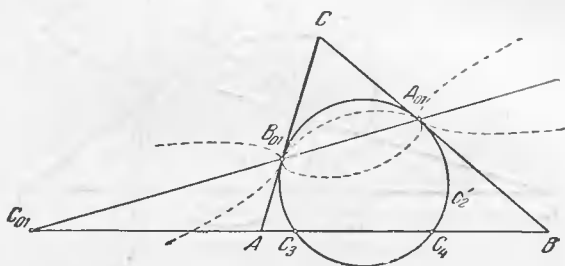


Рис. 3.

вторую теорему Дезарга²⁾, заметим, что пучок кривых второго порядка, касающихся сторон BC и CA в точках A_{01} и B_{01} (см. рис. 3), отсекает на стороне AB инволюцию, входящую в состав заданной системы I_3 . Действительно, отсекаемая инволюция имеет пары (AB) и (C_{01}, C_{01}) , определяемые двумя распадавшимися кривыми пучка: $(AC$ и $BC)$, $(A_{01}B_{01}$ и $A_{01}B_{01})$. Эти же пары, по определению, принадлежат системе I_3 , а двумя своими парами инволюция определяется однозначно. Следовательно, найдется касающаяся BC и AC в точках A_{01} и B_{01} кривая c_2 , на которой лежат точки C_3 и C_4 .

Далее, рассмотрим пучок кривых, проходящих через точки C_3, C_4 и касающихся прямой BC в точке A_{01} (см. рис. 4). Две кривые этого пучка: c'_2 и кривая, распадавшаяся на прямые AB, BC , пересекают сторону AC в парах (B_{01}, B_{01}) и (A, C) . Следовательно, пучок отсекает на стороне AC инволюцию, входящую в состав системы I_3 , и существует кривая пучка c''_2 , проходящая через точки B_3, B_4 . Наконец, рассмотрев пучок кривых, проходящих через точки B_3, B_4, C_3, C_4 , убедимся, что он отсекает на стороне BC инволюцию, входящую в систему I_3 [две общие пары: (B, C) и (A_{01}, A_{01})]. Поэтому в пучке

¹⁾ Ср. статью З. А. Скопца: *Отображение поверхностей второго порядка на плоскость* («Математическое просвещение», вып. 3, стр. 167—171), где аналогичная теорема получена на совсем другом пути.

²⁾ См. Н. А. Глаголев, *Проективная геометрия*, М.—Л., 1936, стр. 129.

найдется кривая c_2 , проходящая через точки A_3, A_4 , т. е. все точки $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4$ лежат на c_2 .

Проводя те же рассуждения в обратном порядке, докажем обратную теорему.

Теорема 5. *Если на сторонах треугольника задать инволюции, по отношению к которым вершины треугольника являются парами соответствующих точек, а другие три пары соответствующих точек лежат на кривой второго порядка, то эти три инволюции образуют систему I_3 .*

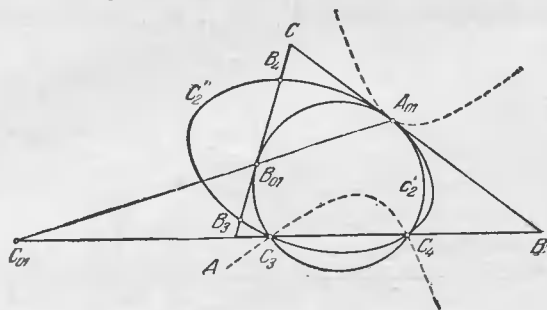


Рис. 4.

Благодаря этому в определении системы I_3 можно заменить требование коллинеарности двойных точек требованием принадлежности трех пар соответствующих друг другу точек, взятых по одной паре в каждой инволюции, одной кривой второго порядка. Такое определение системы I_3 представляется более общим (так как оно включает в себя первоначальное определение, к которому мы приходим, если кривая второго порядка вырождается в пару слившихся прямых); однако оно равносильно первому. Частным случаем теоремы 4 (когда кривая c_2 распадается) является теорема 3.

3. Двойные точки системы I_3 . Теорема 6. *Шесть двойных точек системы I_3 лежат по три на четырех прямых (являются вершинами полного четырехсторонника). Если двойные точки A_{01}, B_{01}, C_{01} коллинеарны, то прямые $AA_{01}, BB_{01}, CC_{01}$ (CC_{01} — вторая двойная точка на стороне AB) пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть A_{01} и B_{01} — двойные точки, принадлежащие сторонам BC и CA (см. рис. 5). Докажем, что точка $C_{01} \equiv A_{01}B_{01} \times AB$ также является двойной. Чтобы найти соответствующую точку для C_{01} в системе I_3 , нужно, согласно теореме 3, найти вторую точку пересечения кривой 2-го порядка $(A_{01}A_{01}B_{01}B_{01}C_{01})$ с прямой AB . Но кривой, определяемой этими пятью точками, является сдвоенная прямая $A_{01}B_{01}$, которая дважды пересекает прямую AB в точке C_{01} . Следовательно, C_{01} — двойная точка. Комбинируя каждую из двойных точек одной прямой с двойными точками другой, мы получим, очевидно,

четыре различные прямые, на каждой из которых лежат по три двойных точки.

Кроме того, в пучке кривых, касающихся сторон BC и CA в точках A_{01} и B_{01} , найдется кривая c_2^0 , касающаяся AB в точке C_{02} , которая будет второй двойной точкой. Применяя теорему Бриансона к треугольнику ABC , описанному около c_2^0 , получим, что AA_{01} , BB_{01} , CC_{01} пересекаются в одной точке.

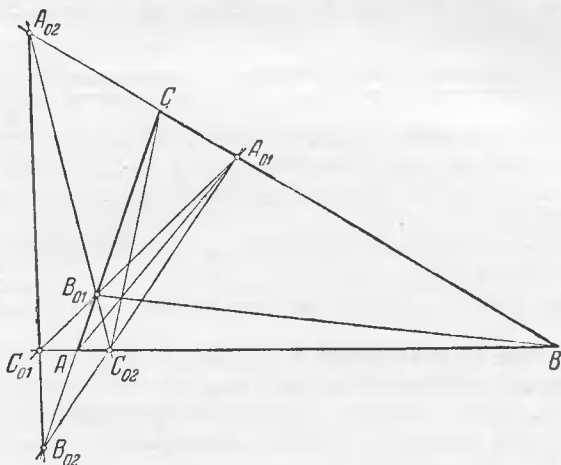


Рис. 5.

4. Двойственные теоремы. Изменение формулировок аффинных или метрических теорем с тем, чтобы придать им проективное содержание, часто позволяет установить связь между разнородными на первый взгляд теоремами. Это становится возможным благодаря тому, что в проективной плоскости можно различными способами выбрать несобственную прямую (и ортогональную инволюцию на ней). Кроме того, возможен предварительный переход к двойственному предложению.

В качестве примера покажем, как можно от теоремы 1 через ее проективное обобщение перейти к теореме 2 (и наоборот — от теоремы 2 к теореме 1). Такой переход делает более прозрачным двойственный характер обеих теорем.

Чтобы формулировать теорему, двойственную теореме 3, определим систему инволюций I_3 , двойственную I_3 .

Системой инволюций I_3 назовем совокупность трех инволюций в пучках прямых с центрами пучков в вершинах трехвершинника, причем соответствующими парами в каждой инволюции являются стороны трехвершинника, а три двойные прямые (по одной из пучка) пересекаются в одной точке.

Теорема За. Если три прямые системы I_3 пересекаются в точке L , то соответствующие прямые также пересекаются в точке L' .

Точечное соответствие $L \leftrightarrow L'$ является квадратичной точечной инволюцией¹⁾ с особыми точками в центрах пучков.

Если теперь в метрической плоскости в качестве двойных прямых взять три биссектрисы треугольника, то соответствие точек, возникающее благодаря теореме 2, становится изогональным, так как пары прямых в инволюциях системы I'_3 образуют с биссектрисами равные углы. Таким образом, теорема 2 есть частный случай теоремы 3а. Схематически установленную связь между теоремами 1, 3, 3а и 2 можно изобразить такой цепочкой:

$$1 \xrightarrow{\text{обобщение}} 3 \xrightarrow{\text{двойственность}} 3а \xrightarrow{\text{специализация}} 2.$$

Предоставляем читателю проверить самостоятельно, что следующие известные предложения евклидовой геометрии также могут быть получены как следствия из проективной теоремы 6 о расположении двойных точек системы I_3 :

- а) медианы треугольника пересекаются в одной точке;
- б) средняя линия треугольника параллельна его стороне;
- в) диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

5. Перенесение на неевклидову геометрию. Ценность проективного обобщения теоремы заключается еще в том, что из нее легко получить теоремы неевклидовой геометрии. Для этого нужно выбрать на проективной плоскости в качестве абсолюта неособую кривую второго порядка c_2 ²⁾.

Если кривая c_2 действительна, то имеем геометрию Лобачевского с гиперболической метрикой расстояний. В этой метрике равенство отрезков PO и OQ прямой PQ , пересекающей c_2 , сводится к равенству двойных отношений $(POUV)$ и $(OQUV)$, где U и V — точки пересечения прямой PQ с абсолютом c_2 (несобственные точки).

Из равенства $(POUV) = (OQUV)$ следует, что $(POUV) = (QOVU)$, т. е. $(POUV) \overline{\overline{}} (QOVU)$. Это значит, что середина O отрезка PQ является двойной точкой инволюции, определенной парами (PQ) и (UV) . Если взять на прямой PQ две другие точки M и N , симметричные относительно O ($MO = ON$), то $(MOUV) = (ONUV) = (NOVU)$, $(MOUV) \overline{\overline{}} (NOVU)$, и пара (MN) принадлежит той же инволюции.

Если теперь в плоскости Лобачевского взять треугольник ABC и связать с ним систему I_3 такую, чтобы несобственные точки были парами инволюции, то получим систему трех симметрий относительно середин сторон треугольника. Вторые двойные точки полученной системы I_3 лежат вне абсолюта и являются идеальными. Назовем условно эти точки *внешними серединами* сторон треугольника.

¹⁾ См., например, Р. Уокер, Алгебраические кривые, М., 1952, стр. 90.

²⁾ См. например, Дж. В. Юнг, Проективная геометрия, М.—Л., 1949, стр. 168 или Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия, М.—Л., 1953, стр. 321—330.

Тогда, при внимательном рассмотрении различных комбинаций внутренних и внешних середин сторон, мы из теоремы 6 получим ряд следствий, справедливых в геометрии Лобачевского:

а) *три медианы треугольника пересекаются в одной точке.*

Прямую, проходящую через вершину треугольника и гармонически сопряженную с медианой относительно двух сторон треугольника, назовем *внешней медианой*.

б) *Две внешние и одна внутренняя медианы треугольника, проходящие через различные вершины, принадлежат одному пучку (т. е. пересекаются в точке, которая может быть собственной, несобственной или идеальной).*

в) *Средняя линия треугольника, соответствующая двум сторонам, третья сторона и внешняя медиана, проведенная через противоположную вершину, принадлежат одному пучку.*

Аналогичные следствия из теоремы 6 имеют место в эллиптической геометрии (геометрии Римана), которая реализуется на всей проективной плоскости; абсолютом на ней принимается мнимая кривая c_2 . Тогда три точки A, B, C определяют четыре треугольника. Если выделить один из них, то следствия а), б), в) будут иметь место и в эллиптической геометрии. Кроме того, здесь имеют место такие предложения:

г) *внешние середины сторон треугольника коллинеарны;*

д) *средняя линия треугольника, соответствующая двум сторонам, пересекает третью сторону в ее внешней середине.*

Заметим, что из теоремы, двойственной теореме 6, могут быть получены аналогичные следствия для внутренних и внешних биссектрис углов треугольника в различных неевклидовых геометриях.

6. Обобщение на n -мерное пространство. Обобщение рассмотренных конструкций на n -мерное проективное пространство P_n получается следующим образом. Пусть в P_n имеется симплекс A_1, A_2, \dots, A_{n+1} . На одномерных ребрах симплекса определим инволюции так, чтобы соответствующими парами были вершины симплекса, а все вторые пары, определяющие инволюции, лежали на гиперквадрике V_{n-1}^2 . Полученную систему инволюций назовем системой $I_{C_{n+1}^2}$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 4.

Теорема 7. $\frac{n(n+1)}{2}$ пар точек инволюций системы $I_{C_{n+1}^2}$, взятых по одной паре на каждом одномерном ребре симплекса, принадлежат гиперквадрике.

Доказательство этой теоремы весьма близко к доказательству теоремы 4. Мы его приводить здесь не будем.

Для дальнейшего нам понадобится одно свойство полного $(n+2)$ -гранника.

Определение. Полным $(n+2)$ -гранником в P_n называется совокупность $n+2$ гиперплоскостей, никакие $n+1$ из которых не

пересекаются в одной точке. Точка пересечения каких-либо n граней называется его *вершиной*.

Лемма. C_{n+2}^n вершин $(n+2)$ -гранника не лежат на одной гиперквадрике.

При доказательстве используем индукцию по n . При $n=2$ теорема верна, так как шесть вершин полного четырехсторонника не лежат на кривой второго порядка. Далее, будем считать справедливой соответствующую теорему, относящуюся к пространству P_{n-1} .

Пусть в P_n имеем $(n+2)$ -гранник с гранями $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n+2}$. Вершину, в которой пересекаются n граней, отличных от π_i и π_k , обозначим через A_{ik} . В гранях π_i и π_k лежат все вершины, кроме A_{ik} .

Их число равно $\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$. Но $\frac{n(n+3)}{2}$ точек определяют в P_n гиперквадрику. Если такая гиперквадрика единственна, то она должна представлять собой пару гиперплоскостей π_i и π_k ; вершина A_{ik} этой квадрики не принадлежит, и тем самым теорема доказана. Приведенное рассуждение теряет силу, если те же точки определяют еще и другую квадрику V_{n-1}^2 (а следовательно, по меньшей мере пучок гиперквадрик). Но тогда вершины, лежащие в π_i , принадлежат квадрике $V_{n-2}^2 \equiv \pi_i \times V_{n-1}^2$. Эти же точки являются вершинами полного $(n+1)$ -гранника $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n+2}$ в $P_{n-1} \equiv \pi_i$ и, по предположению индукции, не расположены на V_{n-2}^2 . Полученное противоречие заставляет отвергнуть второй случай.

Обобщением теоремы 3 является следующая теорема:

Теорема 8. Если C_{n+1}^2 точек (по одной на одномерном ребре симплекса) лежат в одной гиперплоскости, то соответствующие им в системе $I_{C_{n+1}^2}$ точки также лежат в одной гиперплоскости.

Действительно, если пересечь ребра n -мерного симплекса гиперплоскостью π , то точки пересечения будут вершинами полного $(n+1)$ -гранника в $P_{n-1} \equiv \pi$. С другой стороны, эти точки лежат на квадрике $V_{n-2}^2 \equiv \pi \times V_{n-1}^2$, так как в силу теоремы 7 эти точки и соответствующие им лежат на V_{n-1}^2 . Противоречие с доказанной выше леммой означает, что π является компонентой квадрики V_{n-1}^2 , т. е. последняя распадается на пару гиперплоскостей π и π' . Следовательно, соответствующие точки лежат в гиперплоскости π' .

Доказанная теорема позволяет установить в P_n инволюционное преобразование гиперплоскостей относительно данной системы $I_{C_{n+1}^2}$. Если данный симплекс является координатным, а квадрика, определяющая отличные от вершин пары соответствующих точек системы инволюций $I_{C_{n+1}^2}$ на ребрах симплекса, имеет уравнение $\sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j = 0$, то уравнения инволюционного соответствия гиперплоскостей имеют вид

$$u'_0 : u'_1 : \dots : u'_n = \frac{a_{00}}{u_0} : \frac{a_{11}}{u_1} : \dots : \frac{a_{nn}}{u_n},$$

где u_i и u'_i — координаты соответствующих друг другу гиперплоскостей.

Отсюда видно, что все гиперквадрики, имеющие одинаковые коэффициенты при квадратах неизвестных, определяют одну и ту же систему $I_{C_{n+1}^2}$. Поэтому гиперплоскость $\sum_{i=0}^n a_{ii}x_i = 0$ пересекает ребра симплекса в двойных точках, так как квадрика $(\sum a_{ii}x_i)^2 = 0$ определяет ту же систему $I_{C_{n+1}^2}$.

В заключение заметим, что двойные точки системы $I_{C_{n+1}^2}$ в n -мерном пространстве образуют своеобразные конфигурации. Для плоскости ($n=2$) соответствующий результат содержится в теореме 6. Мы здесь дадим формулировку аналогичной теоремы для трехмерного проективного пространства P_3 .

Теорема 9. *Двенадцать двойных точек системы I_8 лежат по шести в восьми плоскостях, из которых можно составить 16 пар тетраэдров Мёбиуса (таких пар тетраэдров, что вершины одного из них лежат в гранях другого и обратно).*

Доказательство этой теоремы и применение ее к евклидовым геометриям, а также выяснение свойств конфигурации двойных точек системы $I_{C_{n+1}^2}$ при $n > 3$ несложно, и мы его не приводим.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛА «e»

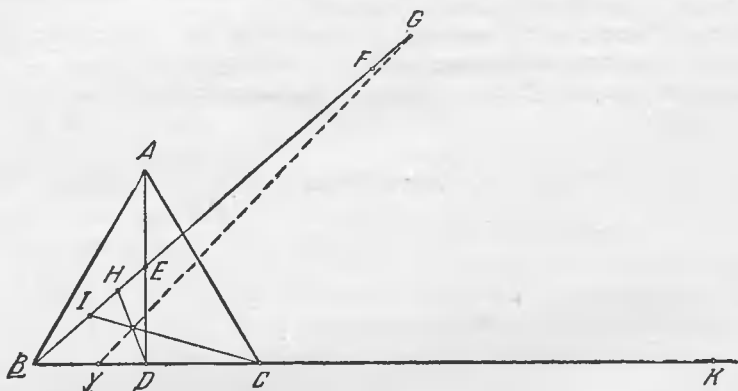
Нетрудно проверить (но не ясно, как это было обнаружено), что

$$\epsilon = \frac{4711 + 3\sqrt[3]{7}}{1736} = 2,718\ 281\ 828\ 30\dots$$

Отсюда следует, что дробь ϵ отличается от числа $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\dots$

приблизительно на 16 миллиардных!

Следующие простые построения приводят к отрезку, точно измеряемому, при выбранной единице, числом ϵ .



Пусть E — середина высоты AD равностороннего треугольника ABC (сторона которого принята за единицу). Отрезок BE продолжим сначала до точки F , а затем и до точки G так, чтобы $BF = 2BC$ и $FG = \frac{1}{3}BE$. На отрезке BE возьмем точки H и I так, чтобы $BH = BD$ и $BI = \frac{1}{3}BC$. Проведем прямую через точку G и через точку пересечения прямых DH и CI ; пусть Y есть точка пересечения этой прямой с прямой BC . Отрезок BC продолжим до точки K так, чтобы $CK = 2BC$; тогда $YK = \epsilon$!

Это построение указал Г. Сендхем (H. Sundham, American Math. Monthly, 1947 г., стр. 215).

А. Л.

ОБ ОДНОМ ТИПЕ КРУГОВОЙ НОМОГРАММЫ

В. Г. Конн

(Казань)

1. В этой заметке рассмотрено применение одной теоремы элементарной геометрии к номографированию трех типов уравнений с тремя и четырьмя переменными.

В журнале «Математика в школе» помещена следующая задача З. А. Скопеца¹⁾:

На касательной a к окружности даны две точки B и C , симметрично расположенные относительно точки касания A . Через каждую из этих точек проведена секущая; одна из них встречается с окружностью в точках M и L , а другая — в точках P и Q . Доказать, что прямые MQ и PL пересекают касательную a в точках E и F , симметрично расположенных относительно точки A .

Эта задача решается элементарно, хотя не очень просто.

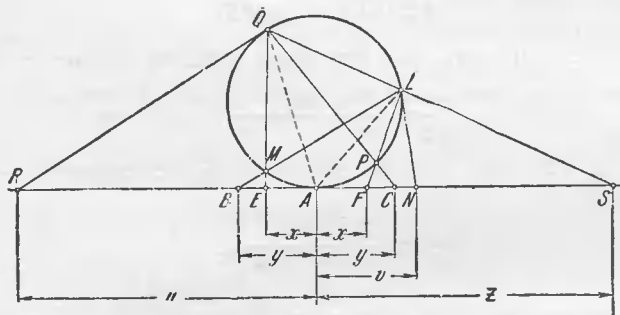


Рис. 1.

Дополним чертеж, проведя секущую QL , встречающую касательную a в точке S , а также касательные к окружности в точках L и Q , пересекающие прямую a соответственно в точках N и R (рис. 1).

¹⁾ «Математика в школе», 1951, № 6, задача № 95.

Рассмотрим два проективных пучка с центрами в точках Q и L :

$$Q(QM, QA, QP, \dots) \cap L(LM, LA, LP, \dots).$$

При пересечении этих пучков касательной a в точке A мы получим на ней два проективных прямолинейных ряда:

$$a(E, A, C, \dots) \cap a(B, A, F, \dots).$$

На прямой a установлено проективное соответствие параболического типа, в котором двойным элементом является точка A .

2. Введем обозначения

$$AE = AF = x, AB = AC = y, AR = u, AN = v, AS = z.$$

Запишем равенство сложных отношений:

$$(EACS) = (BAFN) \text{ или } \frac{EC \cdot AS}{AC \cdot ES} = \frac{BF \cdot AN}{AF \cdot BN},$$

т. е.

$$\frac{(x+y)z}{y(x+z)} = \frac{(y+x)v}{x(y+v)} \text{ или } \frac{y+v}{vy} = \frac{x+z}{xz},$$

откуда

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{v} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}. \quad (1)$$

Точно так же из равенства сложных отношений

$$(EACR) = (BAFS)$$

найдем условие, которому удовлетворяют отрезки, равные x, y, z и u :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) мы найдем соотношение, связывающее отрезки u, v и z :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right). \quad (3)$$

Теперь легко построить *круговую номограмму*, при помощи которой легко решать уравнения (1), (2) и (3). Она состоит из окружности произвольного радиуса, касающейся прямой a в точке A , и равномерной шкалы, нанесенной на этой прямой в обе стороны, начиная от точки прикосновения A .

На рис. 2 дано решение уравнения (2) при $y = 1,5$; $z = 2$; $u = 3$. Сначала из точки R [3], взятой на левой шкале, строим касательную к окружности, для чего можно воспользоваться с достаточной степенью точности крестообразным транспарантом, одна из сторон которого

проходит через R и касается окружности, а другая проходит через ее центр. Затем проводим прямую QS , где S [2] берется на правой шкале. Находим точку L пересечения QS с окружностью. На левой шкале берем точку B [1,5], проводим прямую BL и находим точку M пересечения прямой LM с окружностью. Прямая QM пересечет шкалу в искомой точке $E(x)$. Номограмма дает $x \approx 0,7$. Проверка показывает достаточную точность результата.

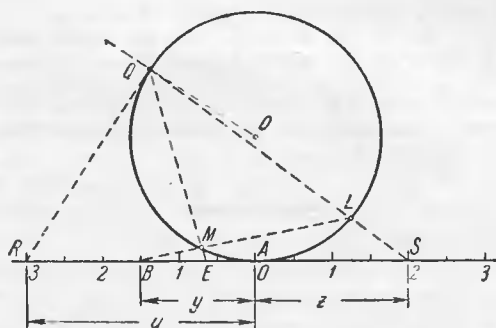


Рис. 2.

Пользование номограммой для решения уравнений (1) и (3) не требует пояснений. Отметим лишь только, что для решения уравнения (3) следует пользоваться крестообразным транспарантом два раза. Для достижения большей точности точку касания можно находить при помощи циркуля.

3. Следует отметить, что в задаче 3. А. Скопеца окружность может быть заменена произвольной кривой второго порядка. Это может быть просто доказано методами проективной геометрии.

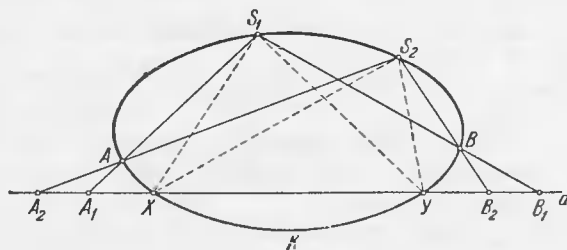


Рис. 3.

Действительно, пусть произвольная кривая второго порядка K пересекается некоторой прямой a в точках X и Y (рис. 3). Отложим на a по разные стороны от X и Y (т. е. внутри или оба вовне кривой) равные отрезки $XA_1 = YB_2$ и проведем прямые A_1S_1 и B_2S_2 , где S_1 и S_2 — две точки, лежащие на K .

Пусть A и B суть соответственно точки пересечения этих прямых с K . Прямые S_1B и S_2A пересекают a соответственно в точках B_1 и A_2 . Докажем, что $A_2X = B_1Y$.

Мы имеем на кривой K проективное соответствие двух пучков с центрами соответственно A и B , которые дают на прямой a проективное соответствие гиперболического типа: $a(X, Y, A_1, A_2) \overline{\wedge} a(X, Y, B_1, B_2)$. Соответственные элементы образуют с двойными элементами постоянное сложное отношение:

$$(XYA_1A_2) = (XYB_1B_2).$$

Так как $XA_1 = YB_2$, $XB_2 = YA_2$, то, выписывая сложное отношение и заменяя YA_2 на $XA_2 + XY$ и XB_1 на $YB_1 + XY$, мы легко получим $A_2X = YB_1$.

Рассмотрим предельное положение прямой a , касающейся кривой второго порядка. Здесь $X \equiv Y$, и теорема, составляющая условие задачи З. А. Скопеца, имеет место и для произвольной кривой второго порядка. Таким образом, при построении номограммы можно было бы взять вместо окружности произвольную кривую второго порядка.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

1. В. А. Жаров (Ярославль). Об одном характеристическом свойстве равнобедренного треугольника. Известно, что в равнобедренном треугольнике ABC ($CA=CB$) отрезки AE и BF , соединяющие вершины A и B с точками E и F боковых сторон и пересекающиеся в точке M на биссектрисе угла C , равны. Эта теорема верна в «абсолютной геометрии» (т. е. и в евклидовой геометрии и в геометрии Лобачевского), что можно установить, например, на основании симметрии равнобедренного треугольника.

И в геометрии Евклида, и в геометрии Лобачевского имеет место также и обратная теорема, т. е. равенство $AE=BF$ является для равнобедренного треугольника характеристическим¹⁾. Здесь приводится «абсолютное» (т. е. не опирающееся на аксиому о параллельности) доказательство этого предложения.

Теорема. *Через точку M биссектрисы CD угла треугольника (см. рисунок) проведены прямые AM и BM , встречающие стороны CB и CA соответственно в точках E и F . Если отрезки AE и BF равны, то треугольник ABC равнобедренный ($AC=BC$).*

Доказательство. Если предположить, что $\angle 1 = \angle 2$ (обозначения ясны из рисунка), то $AM=BM$, $ME=MF$, $\triangle AFM = \triangle BEM$, откуда следует, что $\angle 3 = \angle 4$, а значит, и $\angle A = \angle B$. Таким образом, если $\angle 1 = \angle 2$, то треугольник ABC — равнобедренный.

Докажем, что эти углы не могут быть не равными. Пусть, например, $\angle 1 > \angle 2$. Тогда из треугольников ABE и BAF , имеющих по две равные стороны, заключаем, что $BE > AF$, а из треугольника AMB , что $BM > AM$.

Если теперь отразить треугольник ABE относительно точки K — середины стороны AB , то получится треугольник BAP , причем $BP=AE=BF$ и $AP=BE > AF$. В силу последних соотношений из треугольников BPF и APF заключаем, что $\angle BFP = \angle BPF$ и

¹⁾ См., например, Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. II, Геометрия (планиметрия), М., 1952, стр. 31 и 248—249; Н. А. Иванов, В треугольнике равным биссектрисам соответствуют равные углы (распространение на геометрию Лобачевского), «Математическое просвещение» (старая серия), вып. 6, 1936, стр. 75—77.

$\angle AFP > \angle APF$. Чтобы установить, что угол AFB больше угла APB , покажем, что треугольники AFP и BPF расположены по разные стороны от прямой FP .

Поскольку $\angle CAP = \angle A + \angle B < 180^\circ$, то точка P лежит внутри угла BAR , смежного с углом A . Затем устанавливается, что $\angle CBP < 180^\circ$ ($\angle CBP < \angle CAP$); поэтому точка P лежит внутри угла

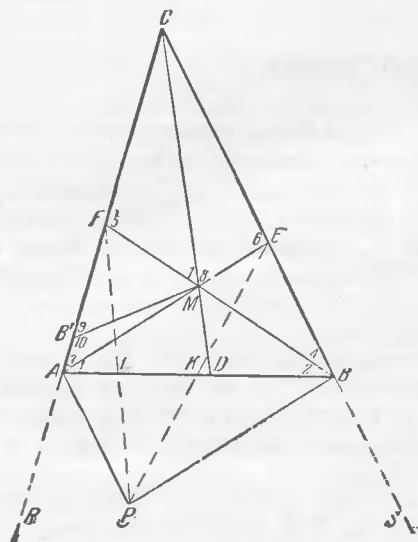
ABS . Значит, точка P лежит внутри области $RABS$, а тем более она должна лежать внутри угла RFB . Отсюда заключаем¹⁾, что полупрямая FP , проходящая внутри угла RFB через его вершину F , пересекает отрезок AB внутренним образом (точки A и B лежат на разных сторонах угла RFB). Вследствие этого треугольники AFP и BFP (имеющие общую сторону FP и противолежащие ей вершины A и B) лежат по разные стороны от прямой FP . Поэтому $\angle AFB > \angle APB = \angle AEB$ и $\angle 5 < \angle 6$.

Теперь докажем, что $\angle CMA > \angle CMB$. С этой целью отразим треугольник CEM относительно биссектрисы CM . Воспользовавшись тем, что внешний угол тре-

угольника больше внутреннего, с ним не смежного, и учитывая неравенство $\angle 5 < \angle 6$, можно установить, что вершина E отразится в точку отрезка CF , расположенную между точками C и F . Тогда будем иметь, что $\angle 7 > \angle 8$ и $\angle CMA > \angle CMB$ (так как $\angle AMF = \angle BME$).

Последнее неравенство позволяет утверждать, что если отразить относительно биссектрисы CD треугольник BMC , то точка B займет положение B' на стороне AC между точками A и C , причем $BM = B'M$ и $\angle 9 = \angle 4$. Поэтому угол 9, как внешний угол треугольника $AB'M$, больше угла 3. Но так как в треугольнике $AB'M$ $AM < B'M$, то $\angle 3 > \angle 10$. Следовательно, $\angle 9 > \angle 10$, а так как эти углы смежные, то угол 9 и равный ему угол 4 тупые. Тем более тупым будет угол 5, как внешний угол треугольника $FB'M$, не смежный с углом 9. Таким образом, в треугольнике BFC имеются два тупых угла 5 и 4.

Полученное противоречие и доказывает, что $\angle 1 = \angle 2$, т. е. что треугольник ABC — равнобедренный.



¹⁾ См. Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, М., 1953, стр. 56, теорема 11а.

2. И. Г. Мельников (Ленинград). Об одном обобщении критерия Эйзенштейна. Среди многочисленных критериев неприводимости многочленов в поле рациональных чисел одним из наиболее распространенных является так называемый критерий Эйзенштейна¹⁾.

Целочисленный многочлен

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (1)$$

все коэффициенты которого, кроме старшего a_0 , делятся на какое-нибудь простое число p , а свободный член a_n , делясь на p , не делится на p^2 , неприводим над полем рациональных чисел.

Критерий Эйзенштейна может быть получен как специальный случай следующей общей теоремы:

Целочисленный многочлен (1), все коэффициенты которого, кроме одного a_m , делятся на простое число p , а крайние коэффициенты a_0 и a_n точно делятся соответственно на p^α и p^β , разлагается в произведение не более чем $\alpha + \beta$ множителей, неприводимых над полем рациональных чисел.

Доказательство. Предположим для определенности, что $0 < m < n$; крайние случаи $m=0$ и $m=n$ рассматриваются аналогично.

Пусть

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \dots \cdot \varphi_s(x) \quad (2)$$

— разложение $f(x)$ в произведение множителей $\varphi_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, s$), неприводимых над полем рациональных чисел. Так как $f(x)$ — целочисленный многочлен, то разложению (2) будет соответствовать, согласно известной лемме Гаусса, разложение

$$f(x) = \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) \cdot \dots \cdot \phi_s(x) \quad (3)$$

в произведение целочисленных множителей $\phi_i(x)$, неприводимых над кольцом целых чисел.

Из равенства (3) получаем сравнение

$$a_m x^{n-m} \equiv \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) \cdot \dots \cdot \phi_s(x) \pmod{p}.$$

Так как x есть неприводимый (простой) по mod p многочлен, то каждый из многочленов $\phi_i(x)$ по mod p равен многочлену вида $b_i x^{k_i}$, т. е. $\phi_i(x) \equiv b_i x^{k_i} \pmod{p}$, $i=1, 2, \dots, s$, причем $k_i \geq 0$ и b_i не делится на p . Иными словами, в многочлене $\phi_i(x)$ коэффициенты при всех степенях x делятся на p , кроме коэффициента при x^{k_i} . Обозначая степень многочлена $\phi_i(x)$ через n_i , имеем $0 \leq k_i \leq n_i$.

¹⁾ G. Eisenstein, Über die Irreducibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Teilung der ganzen Lemniscate abhängt, J. reine angew. Math. 39, 1850, стр. 160—179.

Разделим все многочлены $\psi_i(x)$, $i=1, 2, \dots, s$ на три группы: $k_i=0$ (число таких многочленов $\psi_i(x)$ пусть σ), $k_i=n_i$ (число таких $\psi_i(x)$ пусть σ') и $0 < k_i < n_i$ (число их пусть σ'').

Очевидно, $\sigma, \sigma', \sigma'' \geq 0$, $\sigma + \sigma' + \sigma'' = s$.

Из тождества (3) ясно, что существует не более α многочленов $\psi_i(x)$, старшие коэффициенты которых делятся на p , и не более β таких, свободные члены которых делятся на p . Следовательно, $\sigma + \sigma'' \leq \alpha$, $\sigma' + \sigma'' \leq \beta$, откуда $s \leq \sigma + \sigma' + 2\sigma'' \leq \alpha + \beta$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $m=0$, $\beta=1$, т. е. выполняются условия теоремы Эйзенштейна; тогда $\alpha + \beta = 0 + 1$, и, значит, многочлен $f(x)$, имея в своем разложении не более одного неприводимого множителя, сам окажется неприводимым многочленом.

III. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ

(Опыт преподавания и педагогический эксперимент)

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹⁾

И. Г. Араманович и С. И. Зетель

(Москва)

1. Пусть $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ — две функции, графики которых — гладкие кривые, касающиеся друг друга в точке $M_0(x_0, y_0)$, причем общая касательная к кривым не параллельна оси ординат.

Говорят, что эти кривые имеют в точке M_0 *соприкосновение k -го порядка*, если разность их ординат, соответствующих общей абсциссе x_0 , есть бесконечно малая величина $(k+1)$ -го порядка относительно бесконечно малой величины $\Delta x = x - x_0$. Если k — целое число, то отсюда следует, что в точке x_0 равны между собой производные от обеих функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ до k -го порядка включительно, а $(k+1)$ -е производные будут уже различны.

Иными словами, *порядок соприкосновения кривых равен порядку тех наивысших производных от функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые вместе со всеми предыдущими производными попарно равны между собой при $x=x_0$.*

Раскладывая разность $f(x_0+h) - \varphi(x_0+h)$ в ряд Тэйлора, легко показать, что кривые, имеющие соприкосновение нечетного порядка, не перекрещиваются в точке прикосновения, а кривые, имеющие соприкосновение четного порядка — перекрещиваются.

Если считать функцию $f(x)$ заданной, а функцию $\varphi(x)$ — зависящей от $n+1$ параметра

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_n),$$

то, вообще говоря, можно так подобрать эти параметры, чтобы в некоторой заданной точке графики этих функций имели соприкосновение n -го порядка.

Если в качестве функций φ брать линейные функции $\varphi(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$, то получим соприкасающуюся прямую, т. е. касательную.

¹⁾ Статья написана на основе докладов, сделанных авторами на заседаниях Объединенного семинара кафедр высшей математики московских вузов.

Так как уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ содержит три параметра, то можно добиться того, чтобы окружность имела с данной кривой соприкосновение второго порядка. Получим *соприкасающуюся окружность*, которая оказывается вместе с тем и кругом кривизны.

Если брать функции φ в виде *многочленов n -й степени* $\varphi(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$, то соприкосновение будет по меньшей мере n -го порядка, когда коэффициенты этого многочлена являются коэффициентами разложения функции $y=f(x)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки x_0 .

Полагая $n=2$, всегда можно подобрать *параболу* с осью, параллельной оси ординат, так, что она будет иметь с графиком данной функции соприкосновение второго порядка. Разумеется, в исключительных случаях, именно, когда в данной точке x_0 производная третьего порядка $f'''(x)$ равна нулю, порядок соприкосновения может быть и выше.

Таким образом, пользуясь параболой с осью, параллельной оси ординат, и окружностями, можно получить для данной кривой, вообще говоря, соприкосновение второго порядка. При этом и окружность и парабола будут пересекать кривую. С точки зрения приближения функций это означает, что, заменяя функцию ее многочленом Тэйлора второй степени, мы будем получать приближенные значения функции с недостатком по одну сторону от точки x_0 и с избытком по другую.

2. Будем теперь в качестве соприкасающихся кривых брать *кривые второго порядка, главные направления которых параллельны осям координат*¹⁾.

Полагая, без ограничения общности, что точка M_0 совпадает с началом координат и исключая рассмотренный выше случай, когда кривая является параболой с осью, параллельной оси ординат, запишем уравнения этих кривых в виде

$$y^2 + Ax^2 + 2Bx + 2Cy = 0. \quad (1)$$

При этом мы будем считать, что $C \neq 0$, так как при $C=0$ кривая или имела бы ось ординат своей касательной (при $B \neq 0$), или вырождалась бы (при $B=0$).

Заметим тут же, что если бы в точке M_0 функция $y=f(x)$ имела бесконечную производную, т. е. касательная к ее графику совпадала бы с осью ординат, то все исследование можно было проводить, переставив оси координат, т. е. рассматривая вместо данной функции ей обратную.

¹⁾ Можно было бы рассматривать и произвольные кривые второго порядка. Хотя при этом мы смогли бы повысить порядок соприкосновения еще на единицу, но, во-первых, общий случай значительно менее нагляден, а, во-вторых, получающиеся при этом уравнения слишком громоздки и допускают не единственное решение.

Разрешая уравнение (1) относительно y , получим

$$y = -C \pm \sqrt{C^2 - (Ax^2 + 2Bx)}, \quad (2)$$

где знак перед радикалом выбирается с учетом того, что нас интересует часть кривой, лежащая в окрестности начала координат.

Раскладывая квадратный корень выражения (2) в ряд по степеням $\frac{Ax^2 + 2Bx}{C^2}$, получим (при любом знаке C):

$$y = -\frac{Ax^2 + 2Bx}{2C} - \frac{(Ax^2 + 2Bx)^2}{8C^3} - \frac{(Ax^2 + 2Bx)^3}{16C^5} - \dots \quad (3)$$

Напишем теперь разложение в ряд данной функции (напоминаем, что точка M_0 совпадает с началом координат, разложение ведется по степеням x и, следовательно, свободный член отсутствует):

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (4)$$

Поскольку кривая (1) и график функции $y = f(x)$ пересекаются в начале координат и остаются еще свободными три параметра A , B и C , можно добиться соприкосновения третьего порядка, приравняв друг другу первые три производные функций $f(x)$ и (2), или, что то же самое, коэффициенты при первых трех степенях x в разложениях (3) и (4). Мы получим следующую систему уравнений:

$$\frac{B}{C} = -a_1, \quad \frac{A}{2C} + \frac{B^2}{2C^3} = -a_2, \quad \frac{AB}{2C^3} + \frac{B^3}{2C^5} = -a_3, \quad (5)$$

которая, несмотря на кажущуюся сложность, решается очень просто.

Предполагая сначала, что ни один из коэффициентов a_1 , a_2 , a_3 не равен нулю, и записывая третье уравнение в виде $\frac{B}{C^2} \left(\frac{A}{2C} + \frac{B^2}{2C^3} \right) = -a_3$, легко найдем все неизвестные:

$$A = 2 \frac{a_1 a_2^2}{a_3} - a_1^2, \quad B = \frac{a_1^2 a_2}{a_3}, \quad C = -\frac{a_1 a_2}{a_3}. \quad (6)$$

Если $A > 0$, то кривая второго порядка, дающая наилучшее соприкосновение (третьего порядка), будет *эллипсом*.

При этом, если $A = 1$, то эллипс превращается в соприкасающийся круг, который в данном случае имеет с кривой соприкосновение по меньшей мере 3-го порядка.

Выясним геометрический смысл условия $A = 1$. Заменяя коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 разложения функции производными, после простых преобразований получим

$$(1 + y'^2) y'' - 3y' y''^2 = 0.$$

Левая часть последнего равенства отличается от выражения для производной радиуса кривизны $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ лишь множителем, не об-

ращающимся в нуль. Следовательно, это равенство есть условие того, что радиус кривизны имеет экстремум, т. е. данная точка является вершиной кривой¹⁾.

Если $A < 0$, то кривая (1) будет *гиперболой*, а если $A = 0$, то параболой с осью, параллельной оси абсцисс.

3. Рассмотрим два примера.

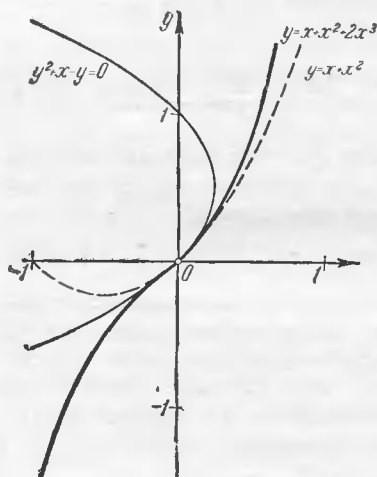


Рис. 1.

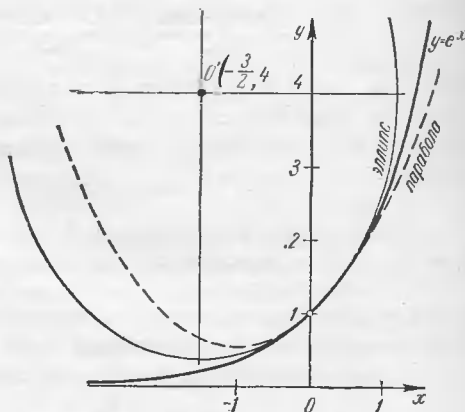


Рис. 2.

1) Кубическая параболa $y = x + x^2 + 2x^3$ в начале координат (рис. 1).

По формулам (6) находим: $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Кривой второго порядка, дающей наилучшее соприкосновение в начале координат с данной кривой третьего порядка (кубической параболой), является параболa $y^2 + x - y = 0$. Параболa же $y = x + x^2$ дает соприкосновение только второго порядка, т. е. на единицу меньше.

2) Экспоненциальная кривая $y = e^x$ в точке ее пересечения с осью ординат (рис. 2).

Полагая $f(x) = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, легко находим $A = 2$, $B = 3$, $C = -3$. «Наилучшей» кривой второго порядка будет эллипс, уравнение которого получим, заменяя в (1) y на $y - 1$:

$$y^2 - 8y + 2x^2 + 6x + 7 = 0.$$

¹⁾ См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, ч. 2, ОНТИ, М.—Л., 1936.

Приравнивая соответствующие друг другу ординаты экспоненциальной кривой и эллипса, получим приближенную формулу:

$$e^x \approx 4 - \sqrt{9 - 6x - 2x^2},$$

которая в окрестности точки $x=0$ дает значительно лучшее приближение ¹⁾, чем параболическая формула Тэйлора:

x	e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	$4 - \sqrt{9 - 6x - 2x^2}$
$\frac{1}{3}$	1,2840	1,2812	1,2843
$\frac{1}{2}$	1,6487	1,6250	1,6548
$-\frac{1}{4}$	0,7788	0,7812	0,7790
$-\frac{1}{2}$	0,6065	0,6250	0,6088

4. Перейдем теперь к рассмотрению *особых случаев*.

1) Пусть $a_1 = 0$.

Из первого уравнения системы (5) следует, что $B = 0$. Но тогда левая часть третьего уравнения (5) тождественно равна нулю и, следовательно, при $a_3 \neq 0$ невозможно добиться соприкосновения третьего порядка. Выражая A из второго уравнения, убеждаемся, что кривая

$$y^2 - 2a_2Cx^2 + 2Cy = 0$$

при любом $C \neq 0$ дает тот же порядок соприкосновения, что и парабола $y = a_2x^2$.

Если же $a_2 = 0$, то можно добиться соприкосновения по меньшей мере четвертого порядка (при $a_4 \neq 0$), приравнивая друг другу следующие члены разложения. Это будет сделано ниже, в п. 5.

2) Пусть $a_2 = 0$.

Из первых двух уравнений системы (5) получим

$$A = -a_1^2, \quad B = -a_1C.$$

Левая часть третьего уравнения тождественно обращается в нуль, и, как и в первом случае, при $a_3 \neq 0$ нельзя добиться соприкосновения третьего порядка. Данная точка кривой является точкой перегиба, и любая кривая второго порядка

$$y - a_1x^2 - 2a_1Cx + 2Cy = 0$$

имеет тот же порядок соприкосновения, что и прямая $y = a_1x$, которая в этом случае пересекает кривую и имеет соприкосновение не ниже второго порядка. Если же $a_3 = 0$, то опять-таки возможно соприкосновение более высокого порядка.

3) Пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$.

При этих условиях соприкосновения третьего порядка нельзя добиться ни при каких условиях, так как из равенства (6) следует, что

¹⁾ Конечно, эта приближенная формула не может конкурировать с формулой Тэйлора в смысле простоты ее применения.

либо $B=0$, либо $\frac{A}{2C} + \frac{B^2}{2C^3} = 0$, что противоречит сделанным предположениям. Отбрасывая третье уравнение, найдем, что любая кривая

$$y^2 - (2Ca_2 + a_1^2)x^2 - 2a_1Cx + 2Cy = 0$$

имеет тот же порядок соприкосновения, что и парабола $y = a_1x + a_2x^2$.

5. Рассмотрим подробнее случай

$$a_1 = 0, a_3 = 0,$$

к которому относятся все *четные* функции. Уравнение (1) имеет теперь вид

$$y^2 + Ax^2 + 2Cy = 0, \quad (7)$$

а разложение функции $f(x)$ — вид

$$f(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + \dots \quad (8)$$

Приравнивая вторые и четвертые коэффициенты разложения и считая, что $a_4 \neq 0$, найдем

$$A = \frac{a_2^3}{a_4}, \quad C = -\frac{a_2^2}{2a_4}. \quad (9)$$

Если $a_2 \neq 0$ и $a_4 = 0$, то соприкосновения 4-го порядка добиться нельзя, а соприкосновение 3-го порядка будет иметь любая кривая вида

$$y^2 - 2a_2Cx^2 + 2Cy = 0. \quad (10)$$

Если, наконец, $a_2 = 0$, то ни одна из кривых второго порядка не дает лучшего соприкосновения, чем прямая $y=0$, т. е. ось абсцисс.

Заметим еще, что если $f(x)$ — четная функция, то $a_3 = 0$, и кривая (7) имеет соприкосновение не ниже пятого порядка.

Пусть, например, $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$. Здесь $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{24}$, $A = -3$, $C = -3$. Учитывая, что $f(0) = 1$, получим «наилучшую» кривую второго порядка $y^2 - 8y - 3x^2 + 7 = 0$, т. е. гиперболу. Выражая ее ординаты, составим приближенную формулу:

$$\cos x \approx 4 - \sqrt{9 + 3x^2}.$$

Выпишем еще несколько приближенных формул, полученных аналогичным образом:

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{8 - \sqrt{25 + 5x^2}}{3}, \quad \frac{\operatorname{sh} x}{x} \approx \frac{8 - \sqrt{25 - 5x^2}}{3},$$

$$x \sin x \approx -3 + \sqrt{9 + 6x^2}, \quad x \operatorname{sh} x \approx 3 - \sqrt{9 - 6x^2}.$$

6. Пусть графиком функции $f(x)$ является *цепная линия*:

$$f(x) = p \operatorname{ch} \frac{x}{p}. \quad (11)$$

Эта задача рассматривалась Д'Оканем¹⁾ и Д. М. Синцовым²⁾, показавшими, что можно построить эллипс, имеющий в вершине цепной линии соприкосновение с ней пятого порядка. Убедимся, что этот результат непосредственно вытекает из наших общих рассмотрений.

Так как

$$p \operatorname{ch} \frac{x}{p} = p + \frac{x^2}{2p} + \frac{x^4}{4!p^3} + \dots$$

то

$$a_2 = \frac{1}{2p}, \quad a_4 = \frac{1}{24p^3}. \quad (12)$$

Вычисляя коэффициенты уравнения (6), в котором y надо заменить на $y - p$, получим $A = 3$, $C = -3p$. Уравнение искомого эллипса запишется так:

$$\frac{(y - 4p)^2}{9p^2} + \frac{x^2}{3p^2} = 1.$$

Соответствующая приближенная формула имеет вид

$$p \operatorname{ch} \frac{x}{p} \approx 4p - \sqrt{9p - 3x^2}$$

или, при $p = 1$,

$$\operatorname{ch} x \approx 4 - \sqrt{9 - 3x^2}.$$

Точность полученной формулы очень велика; так, для значений x , не превышающих по абсолютной величине $0,4 p$, разность между соответствующими ординатами соприкасающегося эллипса и цепной линии не превышает $0,000023 p$.

Поставим теперь обратную задачу, именно задачу о *замене кривой второго порядка цепной линией*. Это представляет интерес потому, что некоторые геометрические свойства цепной линии значительно проще, чем соответствующие свойства кривых второго порядка. В частности, это позволит нам получить достаточно хорошую формулу для приближенного вычисления длины дуги эллипса и гиперболы.

Из результатов формул (10) и (12) следует, что любая центральная кривая второго порядка

$$y^2 - \frac{C}{p} x^2 + 2Cy = 0, \quad (13)$$

наряду с параболой $y = \frac{x^2}{2p}$, имеет соприкосновение третьего порядка с цепной линией $y = p(\operatorname{ch} \frac{x}{p} - 1)$. Соприкосновение высшего порядка имеет только эллипс, получающийся при $C = -3p$.

¹⁾ Д. О с а г н е, Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique.

²⁾ Д. М. Син ц о в, «Математическое просвещение» (старая серия), 1936, № 5, стр. 93—95.

Запишем уравнение (13) в виде

$$\frac{(y + C)^2}{C^2} - \frac{x^2}{pC} = 1.$$

и рассмотрим различные случаи.

1) Пусть $C > 0$. Кривая является *гиперболой* с действительной полуосью C и мнимой \sqrt{pC} . Отношение квадрата мнимой полуоси к действительной равно p и является фокальным параметром гиперболы.

2) Пусть $C < 0$. Кривая (13) есть *эллипс* с полуосями $|C|$ и $\sqrt{p|C|}$. Отношение квадрата полуоси, лежащей на оси ординат, по-прежнему равно p , но теперь оно является фокальным параметром эллипса только в том случае, когда эллипс вытянут вдоль оси ординат.

Таким образом, если уравнение кривой второго порядка задано в форме

$$\frac{(y \pm b)^2}{b^2} \mp \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

то цепная линия, наилучшим образом приближающая данную кривую, имеет уравнение

$$y = \frac{a^2}{b} \left(\operatorname{ch} \frac{bx}{a^2} - 1 \right).$$

Чтобы иметь возможность исследовать точность приближения, рассмотрим отношение разности последующих коэффициентов разложений обеих функций к соответствующему коэффициенту разложения цепной линии.

Простые вычисления дают

$$\Delta = 1 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \text{ для гиперболы, } \Delta = 1 - 3 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \text{ для эллипса.}$$

Отсюда видно, что для гиперболы точность ухудшается по мере увеличения отношения мнимой полуоси к действительной, т. е. с увеличением ее эксцентриситета.

Для эллипса эта зависимость сложнее. Именно, сначала Δ убывает до нуля, а затем снова начинает возрастать; наилучшее приближение получается, когда $\Delta = 0$, т. е. при $b = a\sqrt{3}$, что полностью согласуется с результатом, полученным выше, так как этот эллипс дает соприкосновение пятого порядка.

Спрямление дуги цепной линии $p \operatorname{sh} \frac{x}{p}$, если один из концов дуги находится в ее вершине, приводит к формуле

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{p}} dx = p \operatorname{sh} \frac{x}{p}.$$

Для построения отрезка, равного этой дуге, следует на ординате конца дуги построить окружность и из основания ординаты сделать засечку радиусом, равным p . Отрезок от конца дуги до точки, полученной на окружности, равен длине дуги.

Отметим еще, что если засечка сделана по направлению к вершине цепной линии, то продолжение построенного отрезка является касательной.

Отсюда следует приближенная формула для *спрямления дуги эллипса (или гиперболы)* с полуосями a и b , начинающейся в вершине кривой:

$$L \approx \frac{a^2}{b} \operatorname{sh} \frac{bx}{a^2},$$

где b — величина полуоси, кончающейся в данной вершине, а x — длина перпендикуляра, опущенного из конца дуги на эту полуось.

Любопытно отметить, что в случае окружности ($a=b$) эта приближенная формула означает замену $\arcsin \frac{x}{a}$ на $\operatorname{sh} \frac{x}{a}$.

Приведем в качестве примера геометрическое построение отрезка, равного длине дуги эллипса с началом в конце его большей оси (рис. 3).

Продолжим ось эллипса OA на отрезок $AB = F_1T = p$ и из точки B проведем прямую $BS \perp OB$. Из произвольной точки эллипса M опустим перпендикуляр MN на прямую BS и строим на нем окружность. Далее делаем засечку $NK = p$ и проведем прямую KM . Если дугу эллипса приближенно считать за дугу цепной линии (а это можно, если BN мало по сравнению с p), то отрезок KM и будет равен длине дуги эллипса AM .

В заключение укажем, что приближенное построение радиуса кривизны может быть произведено на основании того, что ордината любой точки цепной линии есть среднее геометрическое между радиусом кривизны в этой точке и ординатой вершины цепной линии.

Применительно к рис. 3 это означает, что $AB \cdot p = NM^2$, где p — радиус кривизны эллипса в точке M .

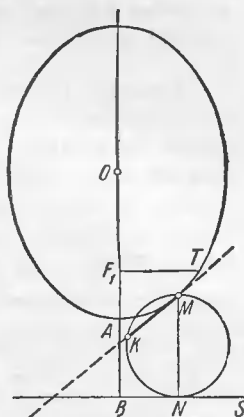


Рис. 3.

КАК ПОЙМАТЬ ЛЬВА В ПУСТЫНЕ?

Подобная проблема не встречается в обычных сборниках математических задач. Но попробуем представить себе, что мы ее поставили перед несколькими воображаемыми фантастическими представителями разных областей математики и физики, глубоко убежденными в универсальной применимости методов именно своей науки. Тогда мы смогли бы получить от них примерно такие решения:

Анализ. Пустыня вписывается в квадрат, который считается единичным. Пусть диаметр льва равен d . Квадрат делим на четыре равных квадрата и по крайней мере в одном из них содержится лев. Последний квадрат снова делится, и этот процесс квадрильяжа продолжается, пока длина стороны квадратика не станет $< 2d$. Лев будет иметь пересечение не более чем с 4 соседними квадратиками, которые образуют квадрат со стороной удвоенной длины $\frac{1}{2^k}$. Тогда, прикрыв этот квадрат крышкой, мы поймем льва.

Впрочем, этот метод действителен, если лев неподвижен. Поэтому, хотя проблема поимки льва полностью не решена, но редуцирована к более частной проблеме — поймать льва при условии, что он движется.

Геометрия. Наблюдатель в пустыне находится в круглой клетке. Лев находится вне клетки. Производится инверсия. Тогда лев попадет в клетку, а наблюдатель — вне ее.

Теория функций действительного переменного. С помощью кривой Пеано пустыня отображается на отрезок $[0, 1]$. Каждый лев попадет при этом не более чем в счетное множество непересекающихся интервалов, которые мы назовем «присущими данному льву». Возьмем совокупность всех рациональных чисел $\{r_k\}$, расположенных в отрезке $[0, 1]$, и перенумеруем их: $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$. Эта последовательность образует всюду плотное множество на $[0, 1]$. Будем двигаться по этой последовательности, пока впервые встретим в ней число r_k , лежащее в интервале, присущем одному из львов. Обозначим этого льва через Льв₁. Далее будем продвигаться по последовательности r_k , пока не встретим впервые число r_{k_2} , принадлежащее интервалу, присущему льву, отличному от Льва₁; этого льва мы назовем Львом₂. Мы получаем регулярный процесс, с помощью которого можно пронумеровать эффективно (без применения аксиомы Церме-

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ ПРИЗНАКЕ ОБРАЩЕНИЯ В НУЛЬ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

И. С. Градштейн

(Москва)

Задачи вычисления определенных интегралов постоянно возникают в математических, физических и технических исследованиях; часто эти задачи представляют значительные трудности. Поэтому интересны даже частные приемы, позволяющие решать достаточно широкий класс таких задач. На одном подобном приеме мы остановимся в этой заметке.

Поставим себе следующую задачу: указать некоторый класс функций $f(x)$, для которых

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 0,$$

т. е. установить какие-либо достаточные условия, налагаемые на функцию $f(x)$, при которых $\int_0^{\infty} f(x) dx = 0$.

Заметим прежде всего, что

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Во втором из этих интегралов сделаем замену переменных $x = \frac{1}{y}$. Тогда

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^0 \frac{f\left(\frac{1}{y}\right) dy}{y^2} = \int_0^1 \left[f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \right] dx. \quad (1)$$

Для того чтобы этот интеграл равнялся нулю (во всяком случае для того, чтобы равнялось нулю его главное значение в смысле Коши), достаточно, чтобы было

$$f(x) \equiv -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right). \quad (2)$$

Представим теперь функцию $f(x)$ в виде произведения $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ и потребуем, чтобы функции $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяли условиям:

$$g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \quad (0 < x \leq 1), \quad (3a)$$

$$h(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot h\left(\frac{1}{x}\right) \quad (0 < x \leq 1). \quad (3б)$$

Будем искать сначала достаточные условия для того, чтобы функция $g(x)$ удовлетворяла условию (3a). Заметим для этого, что, если функции $\varphi_i(x)$ ($0 < x \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют условию (3a), то и любая функция $g(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$, определенная на множестве значений функций $\varphi_i(x)$, также удовлетворяет этому условию. Поэтому достаточно отыскать в каком-либо смысле «простейшие» из функций, удовлетворяющих этому условию. Я укажу некоторые элементарные функции, удовлетворяющие условию (3a).

Для сокращения дальнейшего изложения введем несколько терминов. *Возвратным многочленом* мы назовем многочлен

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (4a)$$

коэффициенты которого, равноотстоящие от его концов, равны; *косовозвратным* мы назовем многочлен

$$\psi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0, \quad (4б)$$

у которого коэффициенты членов, равноотстоящих от его концов, равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Фигурирующее в формулах (4a) и (4б) число n называется *квазистепенью* возвратного (косовозвратного) многочлена. Заметим, что если $a_0 = 0$, то квазистепень возвратного (или косовозвратного) многочлена не совпадает с его степенью; так, $x^3 + x$ есть возвратный многочлен квазистепени 4, $x^4 - x^2$ — косовозвратный многочлен квазистепени 6, x^4 — возвратный многочлен квазистепени 8. (Очевидно, что если степень n косовозвратного многочлена четна, то его «средний» коэффициент $a_{n/2} = 0$.) При этом, как легко проверить¹⁾, возвратные многочлены квазистепени n характеризуются условием

$$\varphi(x) = x^n \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \quad (5a)$$

¹⁾ Ср., например, М. А. Иглицкий, Об уравнениях возвратных и некоторых сходных с ними, «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 173. (Прим. ред.)

а квазивозвратные многочлены квазистепени n — условием

$$\phi(x) = -x^n \cdot \phi\left(\frac{1}{x}\right). \quad (56)$$

Теперь ясно, что условию (3а) удовлетворяют, например, следующие функции:

1°. Частное $\varphi_1(x)/\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — два возвратных многочлена одной и той же квазистепени;

2°. Частное $\phi_1(x)/\phi_2(x)$, где $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ — два косовозвратных многочлена одной и той же квазистепени;

3°. Любая четная функция от отношения $\varphi(x)/\phi(x)$ [или от отношения $\phi(x)/\varphi(x)$], где $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ — соответственно возвратный и косовозвратный многочлены одной и той же квазистепени;

4°. $(\ln x)^{2n}$, где n — натуральное число;

5°. Функции $F(x^p)$, где функция $F(x)$ удовлетворяет тому же условию (3а), а p — любое действительное число.

Перейдем теперь к функциям $h(x)$, удовлетворяющим условию (3б). Заметим, во-первых, что произведение $g(x) \cdot h(x)$, где $g(x)$ — функция, удовлетворяющая условию (3а), также удовлетворяет условию (3б). Поэтому надо найти возможно более простые функции, удовлетворяющие этому условию. Укажу следующие элементарные функции:

1°. Дробь $\varphi(x)/\phi(x)$ или $\phi(x)/\varphi(x)$, где, как всегда, $\varphi(x)$ есть возвратный, а $\phi(x)$ — косовозвратный многочлен, если только квазистепень числителя дроби на две единицы меньше квазистепени ее знаменателя;

2°. Дробь $\frac{\varphi_1(x)(\ln x)^{2n+1}}{\varphi_2(x)}$ или $\frac{\phi_1(x)(\ln x)^{2n+1}}{\phi_2(x)}$, где по-прежнему многочлены $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — возвратные, а $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ — косовозвратные, и, как выше, квазистепень многочлена, стоящего в числителе, на две единицы меньше квазистепени многочлена, стоящего в знаменателе.

Заметим еще, что можно построить бесчисленное множество неэлементарных функций, удовлетворяющих условиям (3а) или (4а). Разумеется, подобные функции нельзя будет свести к перечисленным выше типам. Для этого достаточно, например, задать на отрезке $(0, 1)$ какую-либо (даже элементарную) функцию $g(x)$ [для непрерывности надо потребовать, чтобы $g(1) = 1$] и задать в промежутке $(1, 0)$ значения этой функции, исходя хотя бы из соотношения (3а), скажем, положить

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{» } x \geq 1. \end{cases}$$

Выше я указал некоторые достаточные условия для того, чтобы главное значение интеграла $\int_0^\infty f(x) dx$ равнялось нулю. Для того чтобы

этот интеграл равнялся нулю, надо потребовать, кроме того, чтобы он сходил. Особого внимания заслуживает вопрос о сходимости интеграла

$\int_0^1 f(x) dx$, связанный с особенностью, которую во многих случаях может

иметь подынтегральная функция при $x=1$. Дело в том, что, как легко убедиться, 1 есть корень всякого косоовратного многочлена $\phi(x)$, а также всякой непрерывной при $x=1$ нечетной функции от $\phi(x)$. Кроме того, 1 есть m -кратный корень $(\ln x)^m$. На эти обстоятельства я хотел бы обратить внимание читателей, когда они будут исследовать сходимость интегралов указанных здесь типов.

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Б. И. Сегал

(Москва)

В существующих курсах теории вероятностей (В. И. Гливенко, Б. В. Гнеденко и др.) локальная предельная теорема выводится без указания остаточного члена. Между тем, небольшое видоизменение доказательства этой теоремы дает возможность получить оценку порядка остаточного члена. Это, несомненно, дает более глубокое представление о закономерности, выражаемой локальной предельной теоремой, причем указанное видоизменение доказательства не приводит к существенно более сложным рассуждениям.

Ниже мы приводим такое доказательство. При этом мы ограничиваемся простейшей схемой Бернулли.

Рассмотрим случайное событие A , вероятность наступления которого обозначим через p . Вероятность наступления события A ровно m раз при s независимых испытаниях выражается, как известно, формулой

$$P_s(m) = \frac{s!}{m! n!} p^m q^n \quad (n = s - m, \quad q = 1 - p). \quad (1)$$

Теорема. Если

$$p \neq 0 \text{ и } p \neq 1, \quad x = \frac{m}{s} - p, \quad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{s}}, \quad a \leq \frac{x}{\sigma} \leq b,$$

где a и b — постоянные, то

$$y = s \cdot P_s(m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \right), \quad (2)$$

причем постоянная в O зависит только от p , a и b .

Доказательство. Как известно,

$$k! = \sqrt{2\pi k} \cdot k^k e^{-k} \left(1 + \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi k}} \right), \quad (3)$$

где $|\omega_k| < 1$ ¹⁾. Обозначив

$$R_k = 1 + \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi k}},$$

¹⁾ См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, М. — Л., 1936 (гл. V, § 110).

мы получаем при помощи (1) и (3)

$$y = s \frac{s!}{m! n!} p^m q^n = \\ = \frac{s \sqrt{2\pi s} \cdot s^s e^{-s} \cdot R_s p^m q^n}{\sqrt{2\pi m} \cdot m^m e^{-m} R_m \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} R_n} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{s^2}{mn}} \left(\frac{sp}{m}\right)^m \left(\frac{sq}{n}\right)^n \frac{R_s}{R_m R_n},$$

или

$$y = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}} uvw, \text{ где } u = \sqrt{\frac{s^2}{mn}}, \quad v = \left(\frac{sp}{m}\right)^m \left(\frac{sq}{n}\right)^n, \quad w = \frac{R_s}{R_m R_n}. \quad (4)$$

Но $\frac{x}{\sigma} = \frac{m-sp}{\sqrt{spq}}$; следовательно,

$$m = sp + \frac{x}{\sigma} \sqrt{spq}, \quad n = s - m = sq - \frac{x}{\sigma} \sqrt{spq}, \quad (5)$$

а потому

$$\frac{m}{s} = p + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right), \quad \frac{n}{s} = q + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right). \quad (6)$$

Из (4) и (6) находим

$$u = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{s} \cdot \frac{n}{s}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(p + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right) \left(q + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right)}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{pq}} \frac{1}{\sqrt{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)}},$$

откуда

$$u = \frac{1}{\sqrt{pq}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right). \quad (7)$$

Третье из равенств (4) можно переписать в виде

$$\ln v = -m \ln \frac{m}{sp} - n \ln \frac{n}{sq}.$$

Подставив сюда значения m и n из (5), находим:

$$\ln v = -\left(sp + \frac{x}{\sigma} \sqrt{spq}\right) \ln \left(1 + \frac{x}{\sigma} \sqrt{\frac{q}{sp}}\right) - \\ - \left(sq - \frac{x}{\sigma} \sqrt{spq}\right) \ln \left(1 - \frac{x}{\sigma} \sqrt{\frac{p}{sq}}\right) = \\ = -\left(sp + \frac{x}{\sigma} \sqrt{spq}\right) \left(\frac{x}{\sigma} \sqrt{\frac{q}{sp}} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} \frac{q}{sp} + O\left(\frac{1}{s\sqrt{s}}\right)\right) - \\ - \left(sq - \frac{x}{\sigma} \sqrt{spq}\right) \left(-\frac{x}{\sigma} \sqrt{\frac{p}{sq}} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} \frac{p}{sq} + O\left(\frac{1}{s\sqrt{s}}\right)\right) = \\ = -\frac{x}{\sigma} \sqrt{spq} - \frac{x^2}{\sigma^2} q + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} q + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) + \\ + \frac{x}{\sigma} \sqrt{spq} - \frac{x^2}{\sigma^2} p + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} p + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right).$$

Производя здесь очевидные упрощения и заменив q на $1 - p$, находим

$$\ln v = -\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right),$$

откуда

$$v = e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right). \quad (8)$$

Из (5) и неравенства $a \leq \frac{x}{\sigma} \leq b$ выводим

$$m \geq sp + a \sqrt{spq}, \quad n \geq sq - b \sqrt{spq};$$

следовательно,

$$1 + \frac{\omega_m}{\sqrt{2\pi m}} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right), \quad 1 + \frac{\omega_m}{\sqrt{2\pi n}} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right),$$

и из (4) получаем

$$w = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right). \quad (9)$$

Подставив значения (7), (8) и (9) в равенство (4), получаем доказываемую асимптотическую формулу (2).

Как известно, остаточный член в асимптотической формуле (2) на самом деле является величиной порядка $\frac{1}{\sqrt{s}}$; поэтому применение формулы Стирлинга к равенству (1) не может привести к лучшему результату, если ставить своей задачей лишь оценку порядка остаточного члена.

Желательно также применять в курсах теории вероятностей асимптотическую формулу (2) для оценки порядка остаточного члена в интегральной предельной теореме.

ло) всех львов пустыни:

$Лев_1, Лев_2, \dots, Лев_n, \dots$

Теперь остается лишь поместить $Лев_1$ в первую клетку, $Лев_2$ во вторую и т. д.

Топология. Вводится понятие «шкура». Это — множество точек, предельных одновременно и для льва, и для пустыни. Ставится вопрос — может ли лев не иметь шкуры? Но тогда он должен быть отделен другим львом от пустыни. Это — классический случай беременной львицы, которую вместе с находящимися в ней львами будем называть «обобщенным львом». Ставим вопрос — могут ли два льва иметь общую шкуру? Но тогда 3 области — пустыня и два льва — имеют общую границу, и она является неразложимым континуумом. Вводится понятие «регулярного льва», шкура которого не представляет собой неразложимого континуума, и устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами обобщенных регулярных львов и множеством их шкур.

В дальнейшем доказывается, что шкура является двумерным циклом. В силу принципа двойственности Александера, в дополнительном к льву пространстве существует двумерный цикл, гомологичный шкуре. Это и есть клетка, содержащая данного льва.

Квантовая физика. С точки зрения физика интерес представляют лишь те феномены, которые принципиально наблюдаемы. Лев вне клетки принципиально не наблюдаем, ибо он съест наблюдателя. Поэтому он не может интересовать физика, и мы не погрешим против научной истины, считая, что лев находится в клетке.

Были еще и другие предложения (например, представитель математической логики доказал, что из гипотезы, что лев находится в клетке, не следует, что $0=1$), но из-за недостатка места мы вынуждены ограничиться этим.

Из аспирантского фольклора МГУ 20-х годов.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

К. Текше

(аспирант Московского гос. университета; Венгрия)

1. Древнегреческие математики, а также и математики более позднего времени понимали геометрические построения в основном как *построения, выполняемые с помощью линейки и циркуля*. Но уж в давние времена возник вопрос о возможности ограничений в применении инструментов при выполнении различных построений. Около тысячи лет назад арабский математик Абул Вафа (940—998) написал книгу о построениях, выполняемых с помощью *линейки и циркуля постоянного раствора*. Такого вида проблемами с большим увлечением занимались выдающиеся математики эпохи Возрождения: Дал-Ферроне, Таргалья, знаменитый немецкий художник Альбрехт Дюрер. Задачи на построение, которые Евклид решал с помощью линейки и циркуля, Кардано и Дал-Ферроне умели решать с помощью линейки и циркуля постоянного раствора.

Датский математик Георг Мор в своей работе «Датский Евклид»¹⁾, опубликованной в 1672 г., показал, что все построения второй степени²⁾ выполнимы с помощью одного циркуля. В 1797 г. этот же результат независимо получил итальянский математик Л. Маскерони. Посвященная этому вопросу книга Маскерони «Геометрия циркуля»³⁾ пользовалась большой популярностью; о ней упоминал Парижскому математическому обществу Наполеон.

Японский математик Китизи Янагихара установил, что построения, выполняемые с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью одного только циркуля и в том случае, если величина радиуса *ограничена*, т. е. выполняется неравенство $r \leq \rho \leq R$, где R и r ($R > r$) — заданные отрезки⁴⁾.

¹⁾ Его работа, однако, осталась неизвестной и только в 1928 г. была случайно обнаружена известным датским математиком Иельмслевом.

²⁾ То есть задачи, решенные с помощью линейки и циркуля.

³⁾ L. Mascheroni, *La geometria del compasso*, Roma, 1797.

⁴⁾ K. Yanagihara, On limited Mascheroni geometrical construction, The Tôhoku Math. J. 34, 1931, стр. 89.

Выдающиеся геометры Понселе в 1822 г. и Я. Штейнер в 1832 г. показали, что всякое квадратичное построение сводится к нескольким основным построениям, а для выполнения этих основных построений достаточно иметь в плоскости *одну начерченную окружность со своим центром* («круг Штейнера»); следовательно, каждое построение второй степени можно выполнить только с помощью линейки при наличии в плоскости окружности с ее центром¹⁾. Конечно, это менее удобный способ, чем свободное пользование циркулем, так как построения при этом становятся более громоздкими.

Ф. Севери в 1904 г. и, независимо от него, Д. Д. Мордухай-Болтовский в 1910 г., венгерские ученые Рихард Облат и Дюла Секефальи-Надь и другие доказали, что для выполнения этих построений *достаточно иметь вместо окружности с ее центром лишь малую дугу окружности и центр этой окружности*²⁾.

Д. Гильберт (в своих лекциях) доказал, что одной окружности (без задания ее центра) для построений второй степени недостаточно — *центр основной окружности существенно необходим*; Д. Кауер показал, что *даже наличие начерченной второй окружности не может заменить центра первой, но уже две концентрические, две касающиеся или три произвольные (не принадлежащие одному пучку) окружности заменяют неизвестный центр*³⁾. Далее Янагихара доказал, что *центр окружностей может быть построен с помощью одной линейки, если начерчены две касающиеся дуги двух окружностей или же три произвольные дуги окружностей, которые не принадлежат одному пучку*⁴⁾.

Наконец, Р. Облат еще упростил вышеуказанные условия: он доказал, что *четыре данные точки, находящиеся на окружности на равных расстояниях друг от друга, дают возможности построить ее центр с помощью одной линейки*⁵⁾.

¹⁾ J. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin, 1833. Русское издание: Я. Штейнер, Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, М., 1939.

²⁾ F. Severi, Sui problemi determinati visiolubili colla riga e col compasso, Rendiconti Circ. Mat. Palermo, 1904, стр. 256—263; D. Mordukhai-Boltovskoj, Sur les constructions au moyen de règle et d'un arc de cercle fixe dont le centre est connu, Periodico di mat. 4, 14, 1934, стр. 101—111; R. Oblát, Bemerkungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, Monatshefte für Math. und Physik 26, 1915, стр. 295—298; Gy. Sz-Nagy, Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, The Tôhoku Math. J. 40, 1934, стр. 76—78. Относительно доказательства см., например, И. М. Яглом, Геометрические преобразования, т. II, М., 1956, гл. I третьей части, § 3—5.

³⁾ D. Cauer, Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein, Math. Annalen 73, 1913, стр. 90—94.

⁴⁾ K. Yanagihara, Note on the construction problems in Elementary Geometry, The Tôhoku Math. J. 24, 1925, стр. 125—127.

⁵⁾ R. Oblát, Ein Beitrag zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, Acta Sci. Math. Szeged. 14, 1951, стр. 101—102.

В настоящей работе продолжены исследования в этом направлении; они основаны на элементарных фактах проективной геометрии.

2. Прежде всего, перечислим несколько известных построений, которые возможно выполнить лишь с помощью одной линейки; они будут нам нужны при рассмотрении ряда задач.

1°. Если на прямой дан отрезок и его средняя точка, то через любую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной.

2°. Если на одной из двух данных параллельных прямых дан отрезок, то можно построить его среднюю точку.

3°. Если на прямой даны два прилегающих друг к другу отрезка, находящиеся в данном рациональном отношении, то через любую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной.

4°. Если на данной из двух данных параллельных прямых лежит отрезок, то можно построить на той же прямой второй отрезок, образующий с первым отрезком заданное рациональное отношение.

5°. Можно построить касательную к коническому сечению в любой из пяти данных точек, лежащих на этом коническом сечении.

6°. Можно построить точку пересечения прямой, проходящей через одну из пяти данных точек некоторого конического сечения, с самим коническим сечением.

7°. Можно построить касательные к коническому сечению из точки, лежащей вне этого конического сечения (т. е. построить точки касания)¹⁾.

Опираясь на результаты 1—7°, решим еще вспомогательную задачу 8°:

8°. Если начерчена дуга P_1P_2 окружности и указана ее середина A , то можно одной линейкой построить середину D хорды этой дуги и точку B окружности, диаметрально противоположную точке A (рис. 1).

Для построения точки D возьмем на дуге P_1P_2 еще одну точку Q_1 , проведем хорду Q_1Q_2 , параллельную P_1P_2 (согласно 1°), и найдем точку E пересечения прямых P_1Q_2 и P_2Q_1 . Прямая AE пересечет хорду P_1P_2 в точке D .

Для построения точки B проведем через P_1 и P_2 касательные к окружности (согласно 5°, по пяти точкам P_1, Q_1, A, Q_2, P_2 окружности);

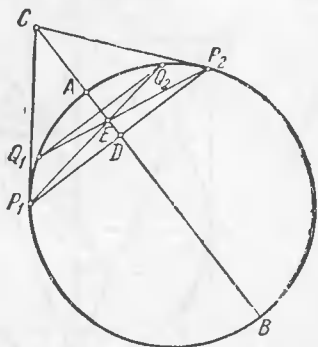


Рис. 1.

¹⁾ О построениях 1° и 2° см., например, Б. И. Аргунов и М. Б. Балк, Геометрические построения, М., 1955, стр. 219—221; о построениях 3° и 4° — в книге Я. Штейнера (см. сноску ¹⁾ на предыдущей стр.), стр. 24 русского издания; построения 5°, 6° и 7° основаны на теореме Паскаля в проективной геометрии.

отметим точку C их пересечения. Как известно, четверка точек C, A, D и B — гармоническая [сложное отношение $(CDAB) = -1$], и точка B строится по точкам C, D и A при помощи известной теоремы проективной геометрии о полном четырехугольнике.

3. Как было сказано в п. 1, если на плоскости начерчена окружность и ее центр, то можно с помощью одной линейки решить любую задачу на построение второй степени; построить же центр данной окружности одной линейкой невозможно.

Опираясь на построения 1—8° и 2, решим три однотипные задачи на построение одной линейкой центра окружности. Задачи эти формулируются так:

Даны дуга P_1P_2 окружности, середина A этой дуги и еще одна точка E_1 окружности такая, что дуга AE_1 равна 45° , 60° или 90° . Требуется построить одной линейкой центр окружности.

Задача 1. $AE_1 = 45^\circ$. Решение. Строим диаметр AB (8°) и хорду E_1E_2 , параллельную P_1P_2 и стягивающую дугу в 90° (1°) (рис. 2). Проводим прямые E_2A и BE_1 и находим точку D их пересечения. $\angle E_2BD = \angle BDE_2 = 45^\circ$; из $\triangle BDE_2$ находим, что $BD:BE_2 = \sqrt{2}$. Но BA — биссектриса угла B ; поэтому $DA:AE_2 = \sqrt{2}$.

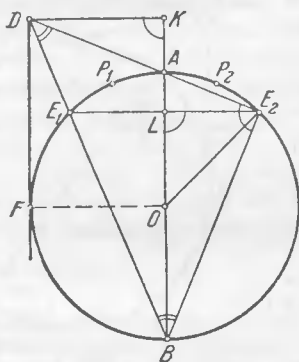


Рис. 2.

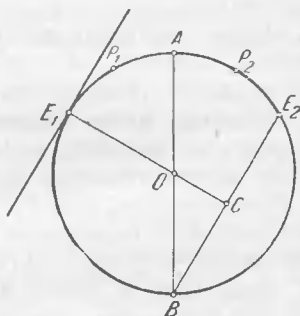


Рис. 3.

Затем проводим $DK \parallel E_1E_2$ (1°). Так как $\triangle AKD \sim \triangle ALE_2$, то $DK:LE_2 = \sqrt{2}$. Наконец, из $\triangle OLE_2$ имеем $OL:LE_2 = \sqrt{2}$. Следовательно, $DK = OL$.

Строим касательную DF к окружности, проходящую через точку D (5°); она параллельна диаметру AB ; через точку F проводим $FO \parallel E_1E_2$ (1°). Следовательно, построение центра O окружности при помощи одной линейки возможно.

Задача 2. $AE_1 = 60^\circ$. Решение. Строим диаметр AB (8°) и хорду E_1E_2 , параллельную P_1P_2 (1°) (рис. 3). Хорда BE_2 и касательная

в точке E_1 параллельны; строим эту касательную (5°). Находим середину C хорды BE_2 (2°). Прямая E_1C пересекает AB в центре окружности O .

Задача 3. $AE_1 = 90^\circ$. Решение. Строим диаметр AB (8°) и касательную к окружности через ее точку E_1 (5°). Эта касательная параллельна диаметру AB , а следовательно, возможно разделить AB пополам (2°) и построить центр окружности.

Примечание. Из доказанного ясно, что если сама дуга P_1P_2 содержит 90 или 120° и известна ее середина, то с помощью линейки можно построить центр окружности.

4. Решим еще три однотипные задачи.

Задача 4. Дана сколь угодно малая дуга P_1P_2 некоторой окружности и ее середина A . Пользуясь только линейкой, построить центр окружности, если отношение $(CDA) = \overline{CA} : \overline{DA} = \lambda$ — известное рациональное число, где C — точка пересечения касательных, проведенных через P_1 и P_2 , а D — точка пересечения прямой AC с хордой P_1P_2 .

Решение. Строим диаметр AB (8°). Через любую точку плоскости проведем прямую параллельно AC (3°). Наконец, строим середину диаметра AB (2°).

Задача 5. Дана сколь угодно малая дуга P_1P_2 некоторой окружности и ее середина A (рис. 4). Пользуясь только линейкой, построить центр окружности, если косинус (или синус) центрального угла, опирающегося на половину данной дуги, — известное рациональное число λ .

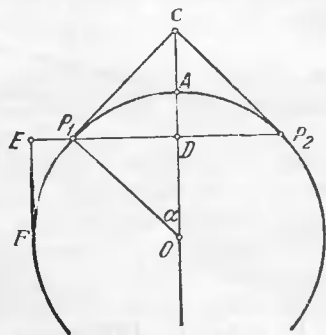


Рис. 4.

Решение. а) $\cos \alpha = \frac{OD}{R}$ — рациональное число. Очевидно,

$$DA = (1 - \cos \alpha) R, \quad OC = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad CA = \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) R.$$

Следовательно,

$$(CDA) = \frac{CA}{DA} = \frac{1/\cos \alpha - 1}{1 - \cos \alpha}$$

есть рациональное число. Мы пришли к случаю, рассмотренному в задаче 4.

б) $\sin \alpha = \frac{P_1D}{R}$ — рациональное число (тот же чертеж). Проведем диаметр AB (8°). Касательные к окружности в крайних точках этого диаметра параллельны хорде P_1P_2 ; следовательно, на прямой P_1P_2 от точки D можно отложить отрезок DE , равный R (4°).

Через точку E проводим касательную EF к окружности (5°). Через F проводим прямую FO параллельно P_1P_2 (1°). Точка пересечения FO с AB есть искомый центр.

Примечание. Если известна дуга некоторой окружности вместе с ее средней точкой и дуга в 30° , отложенная от этой средней точки, то построение центра окружности с помощью линейки возможно, так как $\sin 30^\circ$ есть рациональное число.

Задача 6. Если даны дуга окружности и две параллельные прямые, пересекающие эту дугу таким образом, что отношение отсекаемых хорд есть рациональное число, то возможно построение центра окружности с помощью одной линейки.

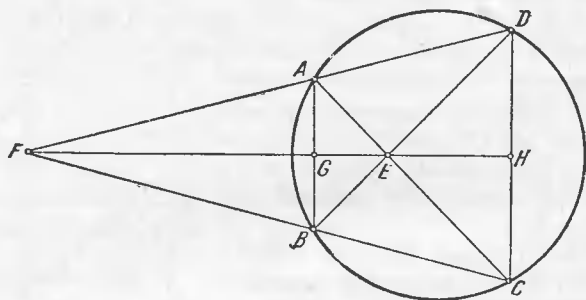


Рис. 5.

Решение. Обозначим данные параллельные хорды AB и CD (рис. 5). Проведем прямые AC , BD , AD , BC и найдем точки E и F . Прямая EF будет диаметром круга; отметим его пересечения G и H с хордами. Так как $\triangle AEB \sim \triangle CDE$, то $\frac{AB}{DC} = \frac{GE}{EH} = \lambda$ — рациональное число. Мы пришли к случаю, рассмотренному в задаче 4.

5. Продолжая результаты Д. Кауера и Янагихары, указанные в п. 1, можно решить следующую задачу.

Задача 7. На двух непересекающихся окружностях даны (соответственно) две сколь угодно малые дуги K_1 и K_2 и средняя точка A на одной из них, например на K_1 . Построить центры этих окружностей, если диаметр, проходящий через точку A , не проходит через середину дуги K_2 .

Решение. Построим хорду P_1P_2 дуги K_1 и касательную в точке A (5°). Определим середину хорды P_1P_2 , используя параллельность хорды и касательной (2°). Прямая, проходящая через середину хорды и точку A , есть диаметр.

Затем в крайних точках дуги K_2 построим секущие параллельно хорде P_1P_2 (1°). На параллельных хордах второй окружности определим

их средние точки (2°). Прямая, соединяющая середины хорд, есть диаметр второй окружности, причем из построения следует, что он параллелен диаметру первой окружности. Следовательно, построение центров обеих окружностей возможно (2°).

6. Д. Гильберт в своей известной книге ¹⁾ рассматривал геометрические построения, которые можно произвести без использования аксиом непрерывности. Он показал, что в таких условиях возможно провести прямую, перенести расстояния, но нельзя начертить окружность. Венгерский математик Ежеш Куршак ²⁾ показал, что в этих условиях перенесение расстояния возможно, однако, с помощью такого инструмента — так называемого «эталоны», — который приспособлен только к перенесению единственного определенного отрезка; например, роль эталона могут играть две засечки на линейке. Р. Облат ³⁾ показал, что каждое построение второй степени можно выполнить только линейкой и эталоном, если задана сколь угодно малая дуга некоторой окружности со своим центром ⁴⁾.

Но из доказанного выше следует, что при данных условиях *знание центра окружности не является существенным*. Действительно, можно решить следующую задачу:

Задача 8. Построить центр окружности с помощью линейки и эталона, если известна сколь угодно малая дуга этой окружности.

Решение. Построим произвольно две непараллельные хорды окружности и в концах этих хорд — касательные (5°) до взаимного пересечения. Прямые, соединяющие середины хорд с точками пересечения соответствующих касательных, будут диаметрами, а их точка пересечения — центром окружности.

7. Известно ⁵⁾, что если в плоскости дан параллелограмм, то с помощью линейки можно провести прямую, параллельную данной, через любую точку плоскости, а следовательно, и разделить отрезок пополам. Если данный параллелограмм — квадрат, то с помощью линейки можно опустить перпендикуляр на любую прямую.

Если же в плоскости задан правильный шестиугольник, то можно построить с помощью линейки правильный треугольник, одна сторона которого лежит на произвольной прямой.

Возникает вопрос: может ли какой-либо многоугольник, начерченный на плоскости, заменить эталон? Венгерский математик М. Бауэр ⁶⁾ ответил на этот вопрос отрицательно: *эталон нельзя заменить никаким многоугольником*.

¹⁾ Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., 1948, гл. 7.

²⁾ J. Kürshák, Das Streckenabtragen, Math. Ann. 53, 1902, стр. 597—598.

³⁾ См. работу, цитированную на стр. 196.

⁴⁾ Как мы видели, позже выяснилось, что при данных условиях эталон не является существенным.

⁵⁾ См. А. Адлер, Теория геометрических построений, М.—Л., 1938.

⁶⁾ M. Bauer, Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, Math.-und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 20, 1903, стр. 43—47.

Нетрудно убедиться, однако, что задача 8 может быть решена, если вместо эталона в плоскости будет дан параллелограмм. Задача будет иметь такую формулировку.

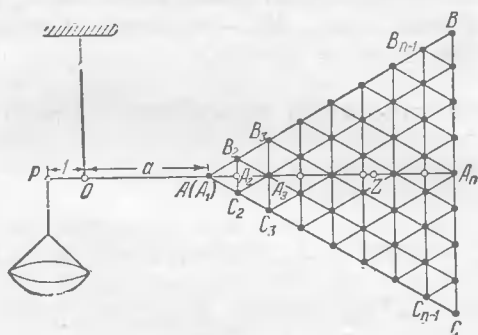
Задача 9. Построить центр окружности с помощью линейки, если известна сколь угодно малая дуга некоторой окружности и начерчен параллелограмм.

В решении задачи 8 эталон был использован только для построения середин указанных отрезков. Но это возможно, если в плоскости начерчен параллелограмм.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

1. М. Б. Балк (Смоленск). Вычисление сумм с помощью взвешивания. Ограничимся здесь рассмотрением сумм вида: $S_n = a \cdot 1 + (a+1) \cdot 2 + (a+2) \cdot 3 + \dots + (a+n-1) \cdot n$.

Выберем правильный треугольник ABC , высота которого AA_n равна $n-1$ см (см. рис., $A_1 \equiv A$). Разобьем AA_n на $n-1$ равных частей точками A_2, A_3, \dots, A_{n-1} и через эти точки проведем прямые $B_2C_2, B_3C_3, \dots, B_{n-1}C_{n-1}$, параллельные BC . Аналогично проведем прямые, параллельные AB и AC , так что в результате $\triangle ABC$ разобьется на равные треугольники, причем высота каждого равна 1 см¹⁾. В каждую



вершину этих треугольников поместим массу, равную 1 грамму. (В общую вершину нескольких треугольников помещаем только один грамм.) Образовавшуюся систему материальных точек будем называть *треугольной системой*.

Выберем на продолжении отрезка AA_n точки O и P так, чтобы O оказалась между P и A , а A — между O и A_n , $PO = 1$ (см), $OA = a$ (см).

Рассмотрим теперь рычажные весы с плечами OP и OA . Плечи будем считать невесомыми. Если в точке P (на левой чашке весов) не помещать никакого груза, то правое плечо с висящим на нем треугольником ABC перетянет. Подберем груз на левой чашке весов так, чтобы весы пришли в равновесие.

¹⁾ Чертеж дан в уменьшенном виде. (Ред.)

Чтобы уравновесить один грамм массы, помещенной в A , нужно в P поместить (в силу правила рычага) такую массу x_1 , чтобы $x_1 \cdot OP = 1 \cdot a$, т. е. $x_1 = a$. Аналогично, чтобы уравновесить 2 грамма массы, помещенные на отрезке B_2C_2 , нужно в P поместить такую массу x_2 , чтобы $x_2 \cdot 1 = 2 \cdot (a + 1)$, т. е. $x_2 = 2(a + 1)$. Вообще, чтобы уравновесить k граммов массы, помещенных на отрезке B_kC_k , нужно в точке P поместить массу $x_k = k(a + k - 1)$, где $k = 2, 3, \dots, n - 1, n$; $B_n \equiv B$, $C_n \equiv C$. Следовательно, чтобы уравновесить всю массу треугольника ABC , нужно в P поместить массу (в граммах), равную S_n .

Весы останутся в равновесии, если мы всю массу треугольной системы сосредоточим в ее центре тяжести Z . Но материальные точки этой системы расположены симметрично относительно медианы AA_n ; значит, Z лежит на AA_n . Точно так же убедимся, что Z лежит на медиане, опущенной на сторону AC . Поэтому Z есть точка пересечения медиан $\triangle ABC$, так что

$$OZ = a + \frac{2}{3} AA_n = a + \frac{2}{3} (n - 1).$$

Подсчитаем общую массу треугольной системы материальных точек. В точке A находится один грамм массы, на B_2C_2 — два грамма, на B_3C_3 — три грамма, ..., на BC — n граммов. Поэтому вся масса M треугольной системы равна (в граммах)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n, \text{ т. е. } M = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (граммов).}$$

Так как весы в равновесии, то в силу правила рычага $S_n \cdot OP = M \cdot OZ$, откуда

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + (a + 1) \cdot 2 + (a + 2) \cdot 3 + \dots + (a + n - 1) n = \\ = \frac{n(n+1)}{2} \left[a + \frac{2}{3} (n - 1) \right]. \end{aligned}$$

В частности, при $a = 1$ и $a = 0$ получим:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Располагая треугольник ABC иначе (так, чтобы точки A и A_n поменялись местами), можно показать, что

$$\begin{aligned} a \cdot n + (a + 1)(n - 1) + (a + 2)(n - 2) + \dots + (a + n - 1) \cdot 1 = \\ = \left[a + \frac{1}{3} (n - 1) \right] \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Та же идея позволяет вычислить и многие другие суммы. Например, располагая на одном рычаге весов массы $\sin \frac{\pi}{n}$, $\sin \frac{2\pi}{n}$, $\sin \frac{3\pi}{n}$, ... $\sin \frac{(n-1)\pi}{n}$ через равные промежутки, получим почти очевидным образом, что

$$\sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}.$$

Суммирование арифметических прогрессий этим приемом слишком тривиально, чтобы здесь на этом останавливаться.

2. Б. Л. Гинзбург (Калуга). Упрощение^{*} умножения слева направо. Многозначные числа пишутся и читаются слева направо, т. е. от высших разрядов к низшим. В то же время умножение таких чисел производится в обратном порядке — вначале получаются цифры низших разрядов. Это порождает затруднения при устном счете и задерживает развитие умения считать, а при приближенных вычислениях заставляет определять лишние, ненужные цифры.

Употребительные способы умножения слева направо требуют либо исправления уже написанных цифр, либо предварительного вычисления цифр следующих разрядов. Предлагаемый ниже способ умножения слева направо, существо которого мы разъясним на примере, свободен от этих недостатков.

Умножим 678139 на 4. Результат умножения будет шестизначным или семизначным числом. Чтобы найти цифру миллионов результата, посмотрим, сколько миллионов содержится в заданном множимом, иначе говоря, возьмем вспомогательную дробь 0,678139. Число миллионов результата должно быть в четыре раза больше; следовательно, оно будет равно числу четвертей миллиона в множимом. Мы имеем

$$\frac{2}{4} = 0,5 < 0,678139 < 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Во вспомогательной дроби содержится, таким образом, две целые четверти; значит, цифра миллионов произведения равна 2.

Чтобы найти цифру сотен тысяч результата, рассматриваем вспомогательное число 6,78139 — число сотен тысяч в множимом. Умножив целую часть на 4 и отбросив десятки (так как цифра миллионов уже определена), получим 4. К этой цифре прибавляем число целых в произведении дробной части вспомогательного числа на 4, т. е. 3, так как $\frac{3}{4} < 0,78139 < 1$. Следовательно, цифра сотен тысяч результата равна $4 + 3 = 7$.

Поступая далее таким же образом, найдем одну за другой все цифры произведения. Для наглядности представим вычисления в виде следующей условной схемы:

$0 \cdot 4 = 0$	$0 + 2 = 2$
$6 \cdot 4 = 4$	$4 + 3 = 7$
$7 \cdot 4 = 8$	$8 + 3 = 1$
$8 \cdot 4 = 2$	$2 + 0 = 2$
$1 \cdot 4 = 4$	$4 + 1 = 5$
$3 \cdot 4 = 2$	$2 + 3 = 5$
$9 \cdot 4 = 6$	$9 + 0 = 6$

В этой схеме первый столбец — это написанное сверху вниз множимое, последний — записанное таким же образом произведение.

Разумеется, все содержащиеся в этой схеме вычисления должны выполняться устно, ибо они несколько не сложнее тех, которые приходится выполнять устно при умножении обычным способом.

Как легко понять, для того чтобы можно было описанным способом выполнить умножение на любое однозначное число, необходимо знать таблицы сложения и умножения по модулю 10 (отличающиеся от обычных лишь отсутствием цифр десятков) и десятичные выражения правильных дробей с однозначным знаменателем. Эти выражения всем известны для случаев, когда знаменатель равен 2, 3, 4, 5 и 9, и легко запоминаются, когда он равен 6 и 8. При знаменателе, равном 7, запоминание облегчается тем, что периоды правильных дробей полу-
чаются из периода дроби $\frac{1}{7}$ посредством круговых перестановок.

Мы опускаем дальнейшие подробности, так как читатель легко сможет уяснить их себе самостоятельно. Укажем лишь, что цифры произведения могут определяться не только слева направо, но и в любом порядке. Поэтому в случае сомнения в какой-либо одной цифре можно проверить только ее, не трогая остальных.

Заметим в заключение, что описанный способ умножения может, по нашему мнению, найти известное применение и в школьном преподавании.

3. А. В. Кужель (Умань). Исследование корней кубического уравнения без использования формул Кардано. В заметке «Решение кубического уравнения»¹⁾ приведен способ нахождения корней кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0,$$

не требующий применения формулы Кардано. Покажем, как корни этого уравнения могут быть просто исследованы без использования формулы Кардано.

¹⁾ «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 148. В этой заметке имеется опечатка: под ω следует понимать комплексный корень третьей степени из $+1$, а не из -1 .

Пусть $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ и $f(x) = x^3 + px + q$.

1) Если $p < 0$, то функция $f(x)$ достигает максимума и минимума соответственно в точках $\beta_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $\beta_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Нетрудно проверить, что $\frac{1}{4}f(\beta_1)f(\beta_2) = D$.

Пусть $D > 0$. Это значит, что значения функции $f(x)$ в точках β_1 и β_2 лежат одновременно либо в верхней, либо в нижней полуплоскостях. Так как в этом случае график функции $f(x)$ может лишь в одной точке пересекать ось X , то уравнение $f(x) = 0$ имеет один действительный корень и два сопряженных комплексных.

Аналогично устанавливается, что если $D < 0$, то все корни данного кубического уравнения действительные и разные.

Если же $D = 0$, то все корни действительные, причем по меньшей мере два из них равны между собой.

2) Если $p \geq 0$, то $D \geq 0$. Так как в этом случае график функции $f(x)$ лишь в одной точке пересекает ось X , то этот случай охватывается одним из ранее рассмотренных.

4. И. Н. Сангир (Москва). Два признака делимости на любое нечетное число, не оканчивающееся на 5. 1-й признак. Для того чтобы число A делилось на нечетное число p , не оканчивающееся на 5, необходимо и достаточно, чтобы на p делилось число, равное разности числа десятков A и произведения числа его единиц на некоторое число n_1 , зависящее от p . Число n_1 определяется формулой

$$n_1 = \frac{pm_1 - 1}{10}, \text{ где } m_1 \text{ — целое число.} \quad (1)$$

Таким образом, для выбора n_1 достаточно подобрать такое целое m_1 , чтобы дробь (1) стала целым числом.

2-й признак. Для того чтобы число A делилось на нечетное число p , не оканчивающееся на 5, необходимо и достаточно, чтобы на p делилось число, равное сумме числа десятков A и произведения числа его единиц на некоторое число n_2 , зависящее от p . Число n_2 определяется формулой

$$n_2 = \frac{pm_2 + 1}{10}, \text{ где } m_2 \text{ — целое число.} \quad (2)$$

Для выбора n_2 достаточно подобрать такое целое m_2 , чтобы дробь (2) стала целым числом.

Доказательство. 1-й признак. Пусть

$$\frac{A - x}{10} - x \frac{pm_1 - 1}{10} = A',$$

где $0 \leq x \leq 9$. Тогда $A = xpm_1 + 10A'$ и, следовательно, $10A'$ (а значит, и A') делится (или не делится) на p одновременно с A^1).

2-й признак. Пусть $\frac{A-x}{10} + x \frac{pm_2+1}{10} = A'$. Тогда $A = 10A - xpm_2$ и т. д.

Нетрудно подобрать значения чисел n_1 (или n_2) для различных нечетных делителей p и выяснить, каким из двух признаков делимости удобнее в каждом отдельном случае пользоваться.

Приведем таблицу возможных значений для n_1 или n_2 в зависимости от различных значений p (в этой таблице k — число десятков делителя).

p	n_1	n_2
$10k+1$	k	$9k+1$
$10k+3$	$7k+2$	$3k+1$
$10k+7$	$3k+2$	$7k+5$
$10k+9$	$9k+8$	$k+1$

Нетрудно проверить правильность таблицы, а также и то, что написанные значения для k являются наименьшими возможными. Рамкой обведены те значения для n_1, n_2 , которыми менее удобно пользоваться; этим и определяется тот из двух указанных признаков, который нужно предпочесть в каждом случае²).

Рассмотрим пример: делится ли на 31 число 3 086 391.

Здесь $A = 3\,086\,391$, $p = 31$, $k = 3$. По таблице (первая строка, средний столбец) вопрос сводится к делимости на 31 числа

$$A' = 308\,639 - 3 \cdot 1 = 308\,636.$$

Далее имеем:

$$A'' = 30\,863 - 3 \cdot 6 = 30\,845; \quad A''' = 3084 - 3 \cdot 5 = 3069;$$

$$A^{(IV)} = 306 - 3 \cdot 9 = 279; \quad A^{(V)} = 27 - 3 \cdot 9 = 0.$$

Следовательно, A делится на 31.

¹) Если число единиц $x=0$, то его место в уравнениях займет предыдущая цифра числа A , не равная нулю; место числа десятков займет место числа сотен и т. д.

²) Отметим те случаи, когда делитель состоит из одних единиц, одних троек или одних девяток. Тогда n_2 будет числом «единица с нулями». В таких случаях всегда предпочтительнее выбирать значение n_2 , даже если делитель состоит из единиц.

Примечание редакции. Признаки делимости, указанные в сообщении И. Н. Сапгира, обобщают признак делимости на 19, который приведен в краткой заметке в вып. 3 «Математического просвещения» (стр. 212) о результате J. Kshangaki, студента колледжа из Восточной Африки. Уже после сдачи в набор настоящего выпуска редакция ознакомилась с новой заметкой того же автора, напечатанной в английском журнале «The Mathematical Gazette» (т. 41, 1957, стр. 122) и с заметкой R. J. Gillings, напечатанной в американском журнале «Scripta Mathematica» (т. 22, 1956—57 гг., стр. 294), содержащих по существу те же результаты, что и сообщение И. Н. Сапгира, а также со статьей Н. Д. Беспамятных «Арифметические исследования в России в XIX в.» («Ученые записки Гродненского педагогического института», вып. II, 1957 г.), содержащей некоторые исторические сведения, касающиеся рассматриваемого здесь вопроса. Затем редакция получила ряд писем и заметок — Э. Т. Аванесова (Рыбицк), И. А. Вильнера (Москва), ученика 10-го класса Л. И. Вильнера (Москва), И. С. Каца (Одесса), Э. С. Лившица (Москва), А. Матеева (София, Болгария), А. И. Мостового (Гурьев), — в основном являющихся откликами на помещенную в 3-м выпуске заметку и имеющих много точек соприкосновения с сообщением И. Н. Сапгира.

Некоторые читатели (И. А. Вильнер, Э. С. Лившиц, А. И. Мостовой) сообщают, что признак делимости на 19 не является новым — он встречался в литературе, в том числе в популярной «Занимательной алгебре» Я. И. Перельмана. Во многих письмах повторены результаты И. Н. Сапгира полностью (И. С. Кац, Э. С. Лившиц, в несколько иной форме — А. Матеев) или частично (Э. Т. Аванесов, Л. И. Вильнер, А. И. Мостовой). Однако и эти результаты также не являются новыми. Э. С. Лившиц, весьма тщательно изучивший историю вопроса, указывает целый ряд источников, где они содержались — например, заметку француза Л ю а р а (Loir) в Докладах Французской академии наук (Comptes Rendus) за 1888 г., или (более раннюю!) статью известного московского математика Н. В. Бугаева в «Математическом сборнике» за 1876—77 гг., или (еще более раннюю!) статью учителя Минской гимназии А. Жбиковского в ныне почти забытом «Вестнике математических наук» за 1861 г.; впоследствии эти результаты неоднократно переоткрывались и публиковались. Э. С. Лившиц считает вероятным первым автором этих признаков делимости А. Жбиковского. Однако, по-видимому, общее число лиц, занимавшихся этим вопросом, весьма обширно (об этом свидетельствует и поток писем на эту тему, полученный редакцией «Математического просвещения»), так что точное установление приоритета здесь довольно затруднительно. (Так, Н. Д. Беспамятных упоминает о том, что Жбиковский заимствовал идею своего признака сходимости у некоего М. М. Гусева.)

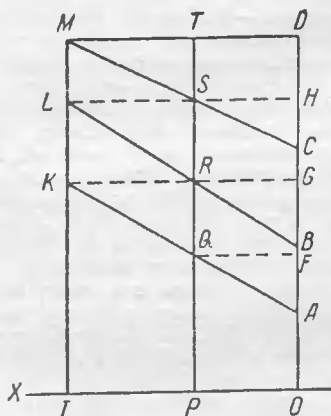
Э. С. Лившиц указывает также простой прием, облегчающий проверку делимости числа A на числа p вида $10k+3$ и $10k+7$, для которых числа n_1 и n_2 , имеющиеся в таблице И. Н. Сапгира, довольно громоздки: этот прием состоит в том, что проверяется делимость числа A на число $3p$ (число вида $10k+9$ или $10k+11$) и лишь на последнем этапе испытания, когда мы придем к небольшому числу, проверяется делимость этого числа на p . Здесь Э. С. Лившиц ссылается на брошюру И. Е. Полякова¹⁾. Л. И. Вильнер и А. И. Мостовой рассматривают также и более общие признаки делимости, заключающиеся в том, что исходное число A заменяется числом вида xA_1+ya , где A_1 и a — числа десятков и единиц числа A , x и y — некоторые целые (не обязательно положительные!) числа, выбор которых зависит от числа p (И. Н. Сапгир рассматривает только случай $x=1$). А. И. Мостовой указывает также применение этих признаков делимости к составлению арифметических задач на делимость чисел, а Л. И. Вильнер рассматривает признаки делимости подобного рода в недесятичных системах счисления.

¹⁾ И. Е. Поляков, Признаки делимости натуральных чисел на любое простое число, М., Углетехиздат, 1934 (на эту брошюру указывает и И. А. Вильнер).

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМА, ПРЕДЛОЖЕННАЯ ЛАГРАНЖЕМ

В связи с опубликованием в 1-м выпуске «Математического просвещения» (стр. 210 и 228) графической схемы нахождения значения полинома, редакция получила от У. Давыдова (Гомель) другую схему, которая кажется автору более простой. Она, действительно, представляет интерес и по существу совпадает с той, которую предложил еще Лагранж в своих «Элементарных лекциях по математике», читанных в Нормальной школе в 1795 г. Вот перевод соответствующего отрывка¹⁾, где излагается построение значения полинома.

«Проводя прямую OX , принимаемую за ось абсцисс с началом в O , берут на этой линии часть OI , равную единице количества a, b, c, \dots , которые можно предполагать вы-



раженными числами, и возводя их в точках O, I перпендикуляры OD, IM . Далее, на линии OD берут части $OA=a, AB=b, BC=c, CD=d, \dots$ и т. д. Пусть теперь $OP=x$, и пусть в точке P проведен перпендикуляр PT . Предположим, например, что d есть последний из коэффициентов a, b, c, \dots , так что предложенная [кривая] имеет только третью степень и речь идет об определении значения $y = a + bx + cx^2 + dx^3$.

Тогда точка D будет последней из тех, что определены на перпендикуляре OD , C — предпоследней. Проведем через D параллель DM оси OI и через точку M , где эта линия пересекает перпендикуляр IM , проводят к точке S прямую SM . Далее, через точку S , где эта прямая пересекает перпендикуляр PT , проводят HSL , параллельную OI , и через точку L , в которой эта параллель пересекает перпендикуляр IM , проводят к точке B прямую BL . Так же через точку R , где эта прямая пересекает перпендикуляр PT , проводят па-

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, т. VII, сmp. 269—272, Paris, 1877.

IV. НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

ХVI КОНФЕРЕНЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КАФЕДР ПЕДИНСТИТУТОВ ЗОНЫ УРАЛА

Ф. Ф. Нагибин
(Киров)

В зимние каникулы 1957/58 учебного года в Кировском педагогическом институте им. В. И. Ленина состоялась очередная шестнадцатая научно-методическая конференция математических кафедр пединститутов зоны Урала.

Такие конференции стали хорошей традицией в жизни педагогических институтов Урала и прилежащих к нему областей. Первая конференция была проведена в 1935 г. в Свердловском пединституте; в ней принимали участие только два института — Свердловский и Пермский. Эта конференция была посвящена, главным образом, обмену опытом работы. Вторая конференция состоялась в Пермском пединституте в 1936 г.; в ней участвовали математические кафедры уже четырех институтов — Кировского, Пермского, Свердловского и Тюменского, всего 12 человек. Цели конференции были определены так:

«... Мы слишком разобщены, мало встречаемся, удалены от культурных центров, от непосредственных истоков научной мысли. В таких условиях легко впасть в кустарничество, потерять перспективу, замкнуться в узком собственном опыте. Встреча на конференции представителей математических кафедр четырех педагогических институтов не может не преодолеть замкнутый круг нашей работы. Она расширит наши горизонты и волеет новые силы в наш творческий труд. Обмен опытом, взаимообогащение, поиски наиболее целесообразных решений стоящих перед нами задач — вторая не менее важная задача конференции»¹⁾.

Вторая конференция содержала несколько научных сообщений, доклады по вопросам методики математики и сообщения, посвященные двухсотлетию со дня рождения Лагранжа. Два заседания были специально посвящены обмену опытом по организации научно-исследовательской работы, проведению педагогической практики, методике практических занятий, работе научных студенческих кружков и общественной работе математических кафедр.

¹⁾ Из вступительного слова проф. Пермского пединститута А. В. Ланкова.

Первый опыт проведения таких конференций оказался удачным, и их стали проводить ежегодно (не проводились они лишь в военные годы). Постепенно росло число институтов, принимающих участие в этих конференциях. Этот рост был особенно значительным в послевоенные годы. Если первые пять конференций охватывали 4—5 институтов, то на шестой конференции основной состав участников пополнился представителями Ижевского, Чкаловского, Челябинского и Шадринского пединститутов и нескольких учительских институтов (Глазов, Златоуст, Кудымкар, Нижний Тагил). На восьмой конференции, происходившей в Перми (1950 г.), представлены были уже 10 педагогических и четыре учительских института; в ее работе принимали участие уже 46 человек. Но особенно многолюдными стали конференции в последние годы. Они значительно переросли рамки зоны Урала.

Наряду с численным ростом состава участников конференций, происходило расширение и углубление тематики обсуждаемых на них докладов. Постепенно наметились и оформились основные направления работы конференций. Рассматривались вопросы истории и методологии математики, методики преподавания отдельных математических предметов в пединституте и в средней школе, обсуждались учебные планы, программы, учебники и учебные пособия для физико-математических факультетов пединститутов и для средней школы. Наконец, на всех конференциях (кроме первой) ставились научные доклады преподавателей пединститутов как обзорного характера, так и о своих работах.

Проведенная в 1958 г. в Кирове 16-я конференция оказалась наиболее многочисленной из всех и по числу участников, и по числу представленных на ней высших учебных заведений. На этот раз в конференции приняли участие 162 (ингородских 112) представителя математических кафедр 50 высших учебных заведений (в том числе — двух университетов) зоны Урала и других городов (Москвы, Ростова-на-Дону, Омска, Новосибирска, Томска, Петрозаводска, Курска, Казани, Куйбышева, Борисоглебска, Пензы, Череповца, Арзамаса, Орехово-Зуева, Муром, Ярославля, Иванова, Балашова и др.).

На пленарных заседаниях конференции были заслушаны и обсуждены следующие доклады:

1) о путях развития преподавания математики в средней школе (В. И. Левин, Москва);

2) о преподавании математики в зарубежных школах (А. И. Маркушевич, Москва);

3) о понятии величины (Е. Г. Гонин, Пермь);

4) опыт преподавания элементов математической логики в педвузе (Б. А. Трахтенброт, Пенза);

5) о постановке работы спецсеминара по математике (Л. И. Волковский, Пермь);

6) к вопросу о противоречиях в математике (Н. Н. Харин, Киров).

В. И. Левин в своем докладе проанализировал состояние преподавания математики в советской средней школе и сформулировал несколько предло-

жений, касающихся наиболее существенных сторон дела. Особое внимание докладчик уделил двум вопросам: аксиоматизации школьного курса математики и строгости доказательств¹⁾.

Доклад А. И. Маркушевича содержал много интересных сведений о преподавании математики в средних школах Франции, США, Японии, ФРГ и других стран; докладчик специально остановился в заключительной части на вопросе о связи элементарной математики с высшей в школьном преподавании.

В докладах Б. А. Трахтенброта и Л. И. Волковыского излагались первый опыт Пензенского пединститута по постановке курса математической логики и опыт Пермского пединститута по проведению математических семинаров.

Е. Г. Гонин в своем докладе рассмотрел существующие трактовки понятия величины, отметив, что в логическом определении этого понятия нет единодушия.

В докладе Н. Н. Харина были рассмотрены некоторые проявления противоречий между абстрактным и конкретным, между формой и содержанием в математике.

На конференции работали пять секций: 1) элементарной математики и методики математики, 2) математического анализа, 3) алгебры, 4) геометрии и 5) черчения.

Первые две секции провели одно совместное заседание, на котором были заслушаны и обсуждены доклады об изучении элементов математического анализа в курсе средней школы. На этом заседании с докладами об опыте изучения в средней школе пределов, функций и производных выступили М. С. Мацкин и Р. Ю. Мацкина (Глазов), а также М. Ф. Тарасова (Череповец). Доклад об элементах математического анализа в учебниках алгебры А. Н. Барсукова и в учебнике под редакцией А. И. Маркушевича сделал И. И. Лихолетов (Пермь).

На других заседаниях секции элементарной математики и методики математики с докладами выступали тт. Е. С. Березанская (Москва), Ф. Ф. Нагибин (Киров), П. А. Буданцев (Оренбург), В. С. Карнацевич и Л. С. Карнацевич (Тюмень), А. А. Феофилачев (Череповец), Н. Г. Килина, А. И. Жаворонков и Н. И. Елина (Киров), Г. И. Лобастов и В. Г. Захарова (Борисоглебск), А. С. Косихин (Новосибирск), В. Н. Парфенова (Челябинск), И. З. Гоз (Оренбург), А. И. Мостовой (Гурьев), Е. К. Нечаев (Тобольск), А. П. Герус (Нижний Тагил), Е. В. Вандышева (Муром), В. Г. Куколев (Пермь) и другие.

Доклады, состоявшиеся в секции анализа, были посвящены различным вопросам анализа и теории функций, а также методике преподавания этих дисциплин в пединститутах. Докладчики А. Ф. Ипатов (Петрозаводск), И. В. Ценов (Орск) и П. К. Суетин (Уральск) рассмотрели некоторые вопросы теории аппроксимации функций. Теории дифференциальных уравнений посвящали свои доклады М. А. Доброхотова (Ярославль), Ю. М. Филимонов (Нижний Тагил), Н. П. Куликов (Балашиха), А. Ф. Боллберг (Магнитогорск). В других научных сообщениях рассматривались некоторые вопросы теории рядов — И. И. Жогин (Шадринск), С. А. Сергушов (Кострома), теории потенциала — В. П. Симонов (Бирск), теории разностных уравнений — А. М. Панов (Свердловск), суммирования функций — И. И. Никитин (Орехово-Зуево) и другие частные вопросы — М. С. Скобло (Тобольск). Методические вопросы освещали в своих докладах И. И. Александров (Арзамас),

¹⁾ Основные положения доклада В. И. Левина изложены в его статье «Некоторые недостатки преподавания математики в средней школе», помещенной в настоящем выпуске «Математического просвещения» (стр. 145—150).

В. П. Третьяков (Омск), *В. П. Симонов* (Бирск), *Н. И. Антропов* (Тюмень), *В. В. Савченко* (Курган).

В секции геометрии в нескольких докладах были рассмотрены вопросы вузовского и среднешкольного курса геометрии. Такими были доклады: «Следствия из аксиом порядка» (из опыта изложения темы в курсе оснований геометрии) и «Опыт изложения начертательной геометрии в пединституте» — *Е. С. Кочеткова* (Челябинск), «Теория измерения в курсе элементарной геометрии педвузов» — *В. Р. Фридлендер* (Казань), «Об изображении круглых тел в курсе стереометрии» — *Е. А. Дышинский* (Пермь). Специальным вопросам геометрии были посвящены доклады: «Основные формулы гиперсферической тетраэдрометрии» — *Н. А. Колмогоров* (Киров), «Геометрия треугольника в векторном изложении» — *В. Ф. Котов* (Магнитогорск), «Преобразования Мёбиуса в неевклидовых плоскостях и циклографическое отображение» — *З. А. Скопец* (Ярославль)¹⁾, «Алгебраические конгруэнции прямых и отображение поверхностей» — аспирант *О. А. Котий* (Ярославль), «Частный случай теории поля локальных регулярных поверхностей в X_n » — *А. И. Першин* (Курган), «Геометрия плоской сети многогранников» — *П. А. Трифонов* (Нижний Тагил), «О геометрическом смысле кубики 17 точек» — *А. Н. Хованский* (Йошкар-Ола), «Об алгебраической теории касательных пространств высшей размерности» — *П. И. Токарев* (Уральск), «Построение и основные свойства конечных конформных плоскостей» — аспирант *Л. И. Истомина* (Пермь), «Упрощение доказательства единственности конечной проективной плоскости с 57-ю точками» — аспирант *И. П. Непорожнев* (Пермь) и «Обобщение теорем Менелая и Чевы на пространство Лобачевского» — *П. А. Глушков* (Барнаул).

В секции алгебры часть докладов была посвящена вопросам теории уравнений: «Построение разрешимых уравнений простой степени» — *В. А. Курбатов* (Свердловск), «Приближенный метод Лобачевского в решении алгебраических и трансцендентных уравнений» — *С. И. Салыкова* (Гурьев), «Элементарное исследование кубического уравнения с вещественными коэффициентами» — *А. Т. Гайнов* (Омск), «О распределении корней многочленов» — *Т. Т. Огарков* (Орск), «Бесконечные системы линейных уравнений, близких к нормальным» — *И. И. Александров* (Арзамас). В других докладах рассматривались некоторые вопросы теории групп: «К вопросу о вполне правильных операциях на классе групп» — *М. А. Фридман* (Глазов), «О представлении свободных групп 2-го ранга целочисленными матрицами 2-го порядка» — *В. К. Кочегура* (Оренбург). Остальные доклады были посвящены: алгебре Клиффорда — *Г. В. Бабилов* (Свердловск), теории цепных дробей — *А. Н. Хованский* и *В. К. Смышляев* (Йошкар-Ола), расширению упорядоченных полукольца — *В. Т. Пономарев* (Нижний Тагил), полиномиальной теореме — *В. И. Левин* (Москва).

Секция черчения организована была впервые. Состав ее был многочислен, но первый опыт оказался удачным. Секция заслушала и обсудила следующие доклады: «Политехническое обучение на уроках черчения в школе» и «Опыт работы по методике преподавания черчения в пединституте» — *М. С. Калачев* (Тюмень), «Оборудование кабинета черчения в пединституте» — *П. А. Смуров* (Киров) и «Из опыта преподавания черчения в пединституте» — *П. И. Карчевский* (Уральск). Основным содержанием этих докладов был обмен опытом работы по курсу черчения.

Одно из заседаний конференции было проведено с широким участием в нем учителей математики школ г. Кирова. На этом заседании с докладом о своем учебнике стереометрии выступил *А. И. Фетисов* (Москва). Учителя высказали пожелание устраивать такие встречи чаще.

¹⁾ Сообщение об этой работе *З. А. Скопца* сделал аспирант *О. А. Котий*.

Повестка конференции оказалась очень насыщенной: всего было поставлено 84 доклада. Это затрудняло их обсуждение. Недостатком было также и то, что в программе конференции почти совсем не было обзорных докладов.

Работа конференции протекала не только на ее заседаниях. Много было сделано и «в кулуарах». Участники конференции обменивались опытом своей работы, выясняли затрудняющие их вопросы, консультировались по темам своих научных и методических работ, задумывали новые и т. д.

На заключительном заседании конференции был принят ряд решений. В частности, были созданы две редакционные коллегии для опубликования материалов конференции. Очередную конференцию решено провести в Оренбургском пединституте в зимние каникулы 1958/59 учебного года.

«Уральские» конференции, несомненно, являются очень плодотворным мероприятием. Чтобы они оказывали еще большее влияние на улучшение работы физико-математических факультетов пединституты, желательно в дальнейшем устранить некоторые организационные недостатки, имевшие место на последних конференциях, и, в частности:

- 1) своевременно начинать подготовку к конференциям, более тщательно отбирать доклады как для пленарных, так и секционных заседаний, выделяя каждый раз стержневые вопросы;
- 2) ставить на конференциях большее количество обзорных докладов;
- 3) привлечь к проведению конференций также и университеты;
- 4) разукрупнить секции, выделив из существующих новые секции (например: теории функций, методики математики, истории математики и др.);
- 5) ежегодно публиковать материалы очередной конференции и, на их основе, специальный методико-математический сборник;
- 6) своевременно извещать участвующие в конференции институты о программе очередных встреч;
- 7) установить общие для всех пединституты сроки зимних каникул и проводить конференции в эти сроки;
- 8) ввести представителя уральских пединституты в состав математической комиссии ГУВУЗ Министерства просвещения.

параллель GRK оси OI и через точку K , где эта параллель пересекает перпендикуляр IM , проводят к первой точке A подразделение перпендикуляра OD прямую AK . Точка Q , где эта прямая пересечет перпендикуляр PT , дает часть $PQ=y$.

В самом деле, пусть через Q проведена параллель FQ оси OP . Два подобных треугольника CDM и CHS дадут:

$$DM(I):DC(d) = HS(x):CH(=dx);$$

добавляя $CB(c)$, получают: $BH=c+dx$.

Также два подобных треугольника BHL , BGR дадут

$$HL(I):HB(c+dx) = GR(x):BG(=cx+dx^2);$$

добавляя $AB(b)$, получают: $AG=b+cx+dx^2$.

Наконец, подобные треугольники AGK и AFQ дадут:

$$GK(I):GA(b+cx+dx^2) = FQ(x):FA(=bx+cx^2+dx^3);$$

добавляя $OA=a$, получают

$$OF=PQ=a+bx+cx^2+dx^3=y \text{ »}.$$

СОВЕЩАНИЕ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ЗАОЧНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ РСФСР

М. Л. Смолянский

(Москва)

С 18 по 23 декабря 1957 г. в Москве проходило республиканское совещание по вопросу улучшения подготовки учителей математики и физики на заочных отделениях пединститутов.

На этом совещании, созванном Московским государственным заочным педагогическим институтом, были преподаватели 26 институтов¹⁾, представители Академии педагогических наук и Министерства просвещения РСФСР. Всего в совещании приняло участие свыше 80 человек.

На совещании были заслушаны следующие доклады:

1) «Из истории развития понятия функции» (*А. И. Маркушевич*, Москва).

2) «Основные вопросы преподавания математических дисциплин на заочных отделениях физико-математических факультетов и разработка учебно-методической литературы» (*В. И. Левин*, Москва).

3) «Постановка преподавания математических дисциплин на заочных отделениях в ГДР» (*М. А. Знаменский*, Москва).

4) «О преподавании элементарной математики на заочных отделениях пединститутов» (*И. К. Андронов*, Москва).

5) «Из опыта проведения факультативных курсов на заочных отделениях физико-математических факультетов пединститутов» (*Н. Г. Алимов*, *Х. А. Агабабов*, Москва).

6) «О постановке преподавания политехнических дисциплин на заочных отделениях физико-математических факультетов пединститутов» (*Е. К. Корчинский*, Ростов-на-Дону).

7) «Постановка практикума по моделированию» (*М. И. Коченовский*, Москва).

¹⁾ На совещании были представлены пединституты Москвы, Ленинграда, Калинин, Воронежа, Великих Лук, Иванова, Коломны, Кирова, Курска, Калуги, Казани, Новосибирска, Новгорода, Орла, Орехово-Зуева, Пензы, Ростова-на-Дону, Свердловска, Сталинграда, Смоленска, Саратова, Тулы, Челябинска, Ярославля.

Мы ограничимся изложением содержания только трех из указанных докладов и обмена мнений по ним.

В своем докладе *В. И. Левин* выдвинул следующие положения:

1) О лекциях и практических занятиях. Курс лекций, читаемый студентам-заочникам, должен быть, прежде всего, *связным и полным*, содержащим четкое и подробное изложение всех основных понятий данного курса; формулировки всех основных теорем с подробным разъяснением и толкованием должны быть приведены в лекциях, но доказательства теорем следует приводить в незначительном количестве. *Лекции должны быть ориентированы на один, максимум на два учебника*; при этом лектор не просто копирует выбранный за основу учебник, а лишь сохраняет его последовательность и принятые в нем обозначения.

Курс лекций должен быть *профессионализирован*, т. е. все те понятия и методы, которые соприкасаются со школьной программой, излагаются особенно тщательно и подчеркивается их связь с школьным курсом.

Соотношение часов между лекциями и практическими занятиями по математике должно быть изменено в пользу последних. На практических занятиях преподаватель *не должен* ставить себе целью проработать со студентами весь материал, рекомендованный программой, а решает задачи последовательно, начиная с первого раздела программы, и прекращает занятия тогда, когда исчерпается отпущенное количество часов, даже если при этом 75% программы останутся непроработанными. Поверхностная проработка на упражнениях всей программы ничего не дает; при активном же прохождении пусть даже одной четверти программы студент получит достаточно прочные навыки, которые помогут ему самостоятельно проработать и остальные три четверти материала.

2) Учебно-методическая литература. Нет необходимости создавать специальный учебник для студентов-заочников. Любой хороший учебник, пригодный для работы в стационаре, может быть использован и студентами-заочниками. Надо лишь выпускать хорошие методические указания к учебникам. Но *специально для заочников необходимо создать задачник, точнее, задачник-практикум*, который должен содержать строго необходимое количество задач. Значительная часть задач в нем должна быть полностью решена. Должны быть приложены подробные ссылки на принятый учебник (или учебники), а также вопросы для повторения теоретического материала.

В настоящее время появилось громадное количество методических пособий для заочников; качество этих пособий далеко не всегда находится на нужной высоте.

3) О контрольных заданиях. При наличии задачника-практикума отпадает необходимость в контрольных работах, выполняемых студентами в периоды между сессиями. Студент должен по данному разделу курса перерешать *все* задачи, помещенные в задачнике-прак-

тикуме. Кафедры и деканаты должны контролировать качество работы студента-заочника между сессиями, например, путем письменного опроса с требованием прислать решения отдельных задач в установленные деканатом сроки.

В заключение докладчик высказал предложения *вести в учебные планы практикум по приближенным вычислениям и увеличить срок обучения заочников-математиков до 6 лет.*

Доклад В. И. Левина вызвал оживленные прения. Большинство выступавших поддержало предложения докладчика о характере лекций для заочников (В. З. Вулих — Ленинград, Н. А. Принцев — Курск, В. М. Данилова — Калинин, А. Ф. Семенович — Свердловск и другие); некоторые согласились с ним и по вопросу метода проведения практических занятий (А. Ф. Семенович, Ю. И. Соркин — Москва и М. Л. Смолянский — Москва), но другие считали, что предложения В. И. Левина нуждаются в коррективах (Н. А. Принцев, В. Л. Булат — Москва, в части преподавания физики). Предложения докладчика по изменению направления учебника и учебно-методических пособий вызвали возражения. К мнению докладчика об отсутствии необходимости в специальных учебниках для заочников присоединился М. Л. Смолянский. Другие выступавшие (Б. З. Вулих, Н. А. Принцев, И. А. Егорова — Ленинград, В. М. Данилова, М. И. Севастьянов — Воронеж, А. Ф. Семенович, В. П. Лебедев — Москва) указывали, что процесс обучения студентов-заочников сильно отличается от «стационарного» и что для каждого курса необходимы специальный учебник и методические пособия и указания к программе. Выступавшие говорили об имеющемся опыте создания таких пособий (И. А. Егорова, И. С. Соминский — Новгород), отмечали очень плохую обеспеченность заочников необходимыми пособиями и учебниками (В. А. Александров — Орел, Н. А. Принцев). Указывалось, что учебный план по некоторым предметам (элементарная алгебра, тригонометрия, аналитическая геометрия) перегружен контрольными работами (П. Н. Севастьянов), что тематика контрольных работ по методике математики должна быть отменена (М. С. Чукалов — Коломна). К предложению увеличить время заочного обучения математиков присоединились Н. А. Принцев, Е. А. Мурзаев — Саратов, Б. З. Вулих; последний поддержал также предложение докладчика ввести в учебный план вычислительный практикум.

Выступавшие в прениях говорили о многих вопросах, не затронутых докладчиками, подвергая резкой критике методические и организационные недостатки в деле подготовки учителей математики и физики на заочных отделениях пединститутов. Частая практика сдачи экзамена студентами-заочниками сразу же после прочитанных лекций характеризовалась как порочная (Б. З. Вулих, М. Г. Чукалов). Отмечались серьезные дефекты учебного плана, в котором контрольные работы по ряду предметов должны сдаваться студентом раньше, чем он прослушает лекции и проработает упражнения (В. М. Данилова), что роль консультационных пунктов принижена (Б. И. Аргунов, А. Ф. Семенович). З. М. Зорин (Тула) указывал, что при выпуске студентов «спецгрупп»¹⁾ физико-математических факультетов им присваивают звание учителя математики и физики, в то время как их подготовка по физике фактически не производится. В. А. Александров также предлагал сузить профиль выпускников-заочников, что уменьшит перегрузку сессий лекциями и практическими занятиями. В. П. Лебедев отметил, что в первых десяти номерах издаваемого Московским гос. заочным пединститутом сборника материалов по заочному обучению нет ни одной статьи, посвященной физико-математическим факультетам.

¹⁾ То есть принятых в пединституты после окончания учительских институтов.

В своем докладе М. А. Знаменский сообщил, что заочное обучение для подготовки преподавателей старшей ступени школы¹⁾ рассчитано в ГДР на пять лет, а для специальностей «математика», «физика», «химия» и «биология» вводится еще *предварительный* годичный курс, который заочники могут и не проходить, если они сдадут экзамен по ряду специальных предметов.

Для заочников в ГДР издаются материалы двух видов:

1) *учебно-методические письма*, полностью заменяющие учебник (весь материал, подлежащий изучению, излагается в письме), и

2) *методические путеводители*, указывающие, как заочнику прорабатывать учебную литературу (в случае необходимости в путеводителе даются дополнения к учебнику).

Весь материал, изложенный в письмах, учебниках и путеводителях, подлежащий изучению, заочник прорабатывает самостоятельно. Для закрепления материала проводятся также индивидуальные и групповые консультации, семинары, практикумы, экскурсии, дополнительные лекции и упражнения, контрольные работы, курсовые испытания и государственные экзамены.

Ежегодно для заочников проводятся трехдневные семинарские курсы, аналогичные нашим сессиям. Они организуются по возможности при Высшей педагогической школе в Потсдаме; отпуск с работы на эти курсы обеспечивается соответствующими постановлениями Министерства просвещения. Курсовые испытания проводятся, главным образом, во время семинарских курсов. Семинарские курсы на гуманитарных факультетах проводятся в течение учебного года; курсы же на естественно-математических факультетах требуют свободных помещений, лабораторий и специальных кабинетов и поэтому могут быть организованы только во время каникул в январе и июле. Отсутствие студента-заочника на семинарских курсах и проводимых в это время испытаниях влечет за собой для него потерю учебного года.

Контроль за работой студента-заочника в ГДР в основном ведется *пунктами по заочному обучению*.

Учебный план пединститутов в ГДР по специальностям «математика» несколько шире, чем в СССР, так как в него дополнительно включены *векторный анализ, топология и теоретическая физика*.

Вопросы элементарной математики в учебный план заочной подготовки преподавателей для «Oberschule» не входят. Некоторые вопросы элементарной математики (действительные числа, элементарные функции) входят только в *предварительный курс*.

Педагогической практики в учебном плане студентов-заочников ГДР нет совсем.

¹⁾ «Oberschule». См. статью Л. Н. Миловановой в 3-м выпуске «Математического просвещения», стр. 213—220.

К учебному плану прилагается список рекомендуемой литературы. Приводим этот список целиком; характерно большое число книг, переведенных с русского языка:

- 1) Мангольдт-Кнопп, Введение в высшую математику,
- 2) Александров, Маркушевич, Хинчин (редакторы), Энциклопедия элементарной математики,
- 3) Курош, Теория групп,
- 4) Грель, Алгебраическая теория чисел,
- 5) Кохендерфер, Введение в алгебру,
- 6) Александров, Введение в теорию групп,
- 7) Виноградов, Введение в теорию чисел,
- 8) Фогель, Классические основы анализа,
- 9) Голузин, Геометрическая теория функций,
- 10) Степанов, Дифференциальные уравнения,
- 11) Александров и Колмогоров, Введение в теорию множеств и теорию функций действительного переменного.

Для повторения рекомендуются:

- 1) Толстов, Ряды Фурье,
- 2) Гюнтер и Кузьмин, Сборник задач по высшей математике,
- 3) Пикерт, Аналитическая геометрия,
- 4) Келлер, Аналитическая геометрия,
- 5) Ефимов, Высшая геометрия.

Для краткой ориентации в отдельных математических областях студенты отсылаются к статьям по математике в «Большой советской энциклопедии». Дальнейшие литературные указания даются в методических письмах.

В своем докладе, посвященном курсу элементарной математики на заочных отделениях в пединституте, И. К. Андронов исходил из того, что этот курс должен дать генетическое обоснование школьного курса математики, знакомить с методом вычисления и построения, наконец, связать вопросы школьной математики с задачами высшей математики.

С курсом элементарной математики в пединститутах (и не только на заочных отделениях) дело обстоит явно неудовлетворительно. Этот курс читают зачастую преподаватели, которые в школе не работали, между тем его можно поручить лишь тому, кто работал в школе в качестве учителя математики не менее чем 2—3 года. Необходимо, чтобы в каждом пединституте была кафедра элементарной математики; в эту кафедру должна включаться и методика математики. Нужно ввести государственный экзамен по элементарной математике.

Кроме непосредственной темы своего доклада, И. К. Андронов высказал свое мнение и по более общим вопросам, о которых говорил в своем докладе В. И. Левин. По мнению И. К. Андропова, заочная система подготовки учителей математики полностью себя оправдала.

Необходимо ввести 6-летний срок заочного обучения; настало также время предъявлять более строгие требования к студентам-заочникам на зачетах и экзаменах. Сейчас в пединституты поступают без экзаменов учителя, которые окончили учительские институты зачастую 10 лет назад; необходимо к ним предъявить более строгие требования и, может быть, ввести для них вступительные экзамены.

В прениях по докладу И. К. Андропова выступил С. И. Новоселов (Москва), который указал, что по курсу «Элементарная математика» нет

до настоящего времени ни устоявшейся программы, ни твердых методических установок. Необходимо, чтобы специальная комиссия по просмотру и составлению новых программ по элементарной математике, работающая в настоящее время, учла пожелания к программе, которые высказаны на конференции. Необходимо в широкой математической прессе опубликовать проект программы для обсуждения его широкими кругами математической общественности. С. И. Новоселов привел различные высказывания учителей о курсе «Элементарная математика» в их письмах, полученных журналом «Математика в школе».

Н. А. Принцев отметил, что на практические занятия по элементарной математике отведено недостаточное число часов. Если на стационаре отношение лекционных часов к практическим занятиям равно 3:9, то для заочников оно равно 3:4. Также неправильно распределены лекционные часы по семестрам: растягивание лекционного курса ничем не оправдано. Необходимо на первом же семестре начать чтение сразу нескольких разделов курса элементарной математики. На лекциях должны быть рассмотрены все без исключения принципиальные вопросы курса. Необходимо резко усилить требования к студентам по курсу элементарной математики.

Н. Г. Федин (Москва) остановился на методе проведения практических занятий по элементарной математике. Студент-заочник должен твердо усвоить все методы решения, применяемые в курсе элементарной математики; очень часто, например, студенты совершенно беспомощны при решении задач на геометрические построения.

В конце работы совещания были приняты развернутые рекомендации, которые приводятся здесь в сокращенном виде¹⁾.

Рекомендации

Одной из причин недостаточных знаний по математике в школах является то, что педагогические институты, в особенности заочные отделения, дают студентам всё еще недостаточную теоретическую и практическую подготовку. В ряде педагогических институтов еще не изжит либерализм в оценках знаний студентов-заочников.

Совещание считает необходимым поставить перед Министерством просвещения РСФСР вопрос о целесообразности продления срока заочного обучения на физико-математических факультетах педагогических институтов до 6 лет.

Необходимо устранить многопредметность на зимних сессиях, сосредоточив на каждой зимней сессии лекции не более чем по 2—3 дисциплинам в объеме не более 10 часов по каждой.

Государственные экзамены проводятся в период летней сессии 5-го курса, что фактически сокращает срок заочного обучения до 4½ лет; необходимо загрузить сессию 10-го семестра занятиями по дисциплинам учебного плана, а государственные экзамены вынести за пределы пяти лет обучения.

Необходимо включить в учебный план заочных отделений вычислительный практикум за счет часов, отводимых на измерительный практикум и практикум по моделированию, увязав этот практикум с разделом «Теория и практика вычислений» курса элементарной математики.

Совещание считает ненормальным отсутствие в учебном плане как стационара, так и заочного отделения специального курса приближенных вычислений с соответствующим практикумом.

Распределение часов на лекции и практические занятия по курсу элементарной математики и курсу методики преподавания математики не соответствует насущным требованиям, предъявляемым к этим курсам студентами-заочниками.

¹⁾ Полный текст рекомендаций конференции помещен в журнале «Заочное педагогическое образование», № 15.

Совещание считает необходимым в настоящее время сократить число контрольных работ по математическим дисциплинам.

Совещание считает, что для приема экзаменов и зачетов у заочников должно быть отведено времени значительно больше, чем для приема экзаменов у студентов стационара. Необходимо значительно повысить требования к знаниям студентов и объективнее их оценивать.

В издании специальных учебников для студентов-заочников по большинству математических дисциплин в настоящее время необходимости нет. Вместе с тем имеется настоятельная необходимость в составлении и издании методических указаний к математическим курсам и задачников-практикумов по этим курсам, а также учебно-методических пособий для заочников по отдельным курсам. В первую очередь необходимо обеспечить такими пособиями курсы элементарной математики, методики преподавания математики, проективной и начертательной геометрии, а также практикума по моделированию.

Совещание обращает внимание на безусловную необходимость снабжения студентов-заочников учебной и методической литературой, для чего библиотеки институтов должны быть под неослабным контролем кафедр.

Совещание особо настаивает на необходимости рассылки в пединституты обязательных экземпляров всех издаваемых учебников для средней школы, а также на увеличение тиража и периодичности журнала «Математика в школе». Необходимо широко распространить среди преподавателей кафедр математики пединститутов методические сборники «Заочное педагогическое образование», на страницах которых должны освещаться актуальные вопросы подготовки учителей математики на заочных отделениях.

Чрезвычайно важной для расширения кругозора учителей математики является также постановка для них факультативных курсов истории математики и истории физики.

В дипломе студентам-заочникам, кончающим педагогические институты, после окончания учительского института должна заноситься запись о присвоении квалификации «учителя математики средней школы», а не «учителя математики и физики средней школы», так как по учебному плану для лиц, окончивших учительские институты, никакая дополнительная квалификация по физике в педагогическом институте не дается.

В заключение необходимо отметить, что несмотря на большую работу, проделанную конференцией, в ней не были в достаточной мере отражены многие из больных вопросов заочного образования.

Так, например, не нашел отражения тот факт, что заочные отделения ряда периферийных педагогических институтов не обеспечены в достаточной мере квалифицированным педагогическим составом, в силу чего преподавание ведущих математических дисциплин проходит на недостаточно высоком уровне.

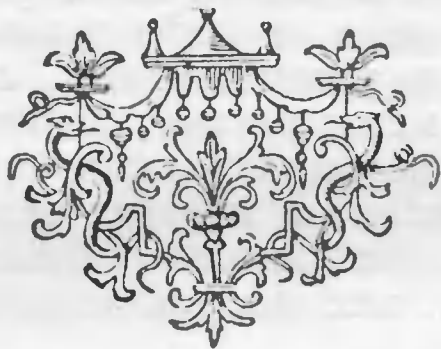
Конференция также прошла мимо того, что ряд выпускников заочных отделений педагогических институтов обладают низким уровнем знаний в области математики и физики; это фактически лишает их возможности вести работу в школе. Необходимо более остро поставить вопрос об увеличении времени на зачеты и экзамены у студентов. Одновременно с этим надо решительно покончить с либерализмом в оценке знаний студентов-заочников.

КЛЕРО О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Знаменитый математик и механик XVIII века Клеро известен так же, как автор элементарных учебников по геометрии и алгебре, выдержавших много изданий. Его «Элементы геометрии» (вышедшие впервые в 1741 г.) — небольшая книжка в 215 стр. с чертежами на

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

Par M. CLAIRAUT, de l'Académie
Royale des Sciences, & de la Société
Royale de Londres.



A PARIS,
Chez DURAND, Libraire, Rue Saint Jacques;
au Griffon.

M. DCC. LIII.

Avec Approbation & Privilège du Roi.

отдельных листах. Многие из них посвящены практическим задачам геометрии (в связи с землемерием). Взгляды Клеро на преподавание начал геометрии изложены в предисловии. Вот отдельные места из этого предисловия:

«Хотя геометрия абстрактна сама по себе, необходимо признать, что трудности, испытываемые теми, которые начинают ее применять, чаще всего проистекают из способа, как им преподаются ее обычные элементы. При этом всегда начинают с большого количества определений, требований, аксиом и первоначальных принципов, которые представляются читателю не обещающими ничего, кроме сухости. Предложения, которые за этим следуют, не останавливают внимание на более интересных объектах; будучи, кроме того, трудными для восприятия, они приводят обычно к тому, что на-

ОКОНЧАНИЕ НА СТР. 232

В ОБЪЕДИНЕННОМ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОМ СЕМИНАРЕ КАФЕДР МАТЕМАТИКИ МОСКОВСКИХ ВТУЗОВ

Л. Я. Цлаф

(Москва)

В «Математическом просвещении» уже сообщалось о деятельности семинара за первые три года его существования¹⁾. Перечислим здесь (с краткими аннотациями) вопросы, которые рассматривались на последующих заседаниях семинара (до мая 1958 г.).

1) Обсуждение ответа министра просвещения РСФСР тов. Е. И. Афanasенко на резолюцию семинара по программам и учебникам в средней школе²⁾.

При этом обсуждении было отмечено, что Министерство просвещения РСФСР отнеслось со вниманием к резолюции семинара. Но всё же некоторые серьезные вопросы требуют совместного обсуждения работников средней и высшей школы. Наиболее важный из этих вопросов — создание такой структуры среднего образования, которая, с одной стороны, выпускала бы людей, подготовленных к практической деятельности, а с другой, — обеспечивала бы удовлетворение требований высшей школы к теоретической подготовке выпускников средней школы.

2) Достаточные условия относительно экстремума (А. П. Маторин).

3) Некоторые достаточные признаки экстремума (А. Я. Белостоцкий).

Вопросам, связанным с изложением теории экстремумов, было посвящено специальное заседание семинара. Особенный интерес вызвал второй доклад; докладчик предложил упрощенную схему исследования функции, при которой экстремумы находятся путем сравнения критических значений функции. Было признано, что предлагаемый метод заслуживает внимания, хотя во многих простых случаях возникают вычислительные трудности, легко обходимые в обычных способах исследования функции по ее производным.

4) Теория кривых второго порядка при едином определении (В. Б. Гуревич).

Автор сделал детальную методическую разработку изложения элементарных сведений о кривых 2-го порядка, исходя из общего фокально-директорального определения, и показал некоторые преимущества такого метода изложения по сравнению с традиционным.

¹⁾ «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 183—186.

²⁾ Там же, стр. 204—209.

5) Обсуждение итогов вступительных экзаменов по математике во втузы в 1957 г.

После оживленных обсуждений докладов завтати кафедр была принята резолюция, помещенная ниже (на стр. 229—230).

6) О тематике изданий математической литературы на ближайшие годы (*Г. Ф. Рыбкин*).

При обсуждении доклада отмечалась недостаточность выпуска литературы по математической логике, вычислительной математике, справочников. Указывалось также на необходимость переводов или же создания книг, аналогичных справочникам Дёча, Бэйтмена, книге Палей и Винера «Преобразования Фурье в комплексной области» и др.

7) Обсуждение рукописи Ю. С. Очана и В. Е. Шнейдера «Курс математического анализа».

8) Обсуждение учебного пособия Р. С. Гутера и Б. В. Овчинского «Приближенные вычисления».

Обсуждение книг и рукописей участников семинара производилось на заседаниях семинара впервые.

9) Об изложении понятия переменной величины и функции в курсе высшей математики втузов (*Е. Б. Ваховский*).

10) К вопросу о понятиях величины, переменной величины и функции (*А. Ф. Бермант*).

11) Элементарное изложение дифференциального и интегрального исчисления, не основывающееся на теории пределов (*В. А. Рохлин*).

Вопросы изложения основ математического анализа во втузах рассматривались на трех заседаниях семинара.

Е. Б. Ваховский подверг критике имеющиеся в литературе определения переменной величины и функции и предложил, опираясь на понятия математической логики, свое определение переменной и функции.

Доклад А. Ф. Берманта содержал в основном критику концепций Е. Б. Ваховского.

В. А. Рохлин предложил заменить обычное построение основ дифференциального и интегрального исчисления методом, который он назвал «наивно-аксиоматическим». В этом методе, например, интеграл выступает как естественное обобщение понятия площади, изучаемого в школе: каждой непрерывной функции, определенной на некотором интервале числовой оси, ставится в соответствие число (интеграл) так, что выполняются требования аддитивности, монотонности и, для случая, когда функция является константой, число равно произведению этой константы на длину интервала. Указанными свойствами интеграл определяется единственным образом; все же вопросы, связанные с теоремой существования, отпадают. Аналогичный подход сделан и для определения производной.

Доклад вызвал очень активные обсуждения; были отмечены как достоинства, так и недостатки предложенного метода и высказано пожелание о дальнейшей разработке идей автора и ее опубликовании.

12) Обсуждение первых трех выпусков сборников «Математическое просвещение».

Была принята резолюция, помещенная ниже (на стр. 230—231).

13) Об одном бесконечном ряде (С. И. Зетель).

Было дано доказательство сходимости ряда, приведенного на стр. 148 1-го выпуска «Математического просвещения», по существу совпадающее с доказательством В. П. Паламодова (стр. 182 3-го вып. «Мат. просв.») и полученное независимо от него.

Вся работа семинара протекала в направлении реализации программы, которая была опубликована в «Математическом просвещении»¹⁾. Деятельность семинара получает уже отклики со стороны преподавателей не только московских втузов, но и из других городов. В дальнейшем намечено поставить на заседании семинара доклады работников втузов Ленинграда, Киева, Харькова и других центров.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Резолюция семинара по обсуждению итогов вступительных экзаменов по математике во втузы в 1957 г.

Заслушав сообщения об итогах вступительных экзаменов по математике во втузы в 1957 г. представителей кафедр высшей математики МИСИ, МТЭИ, МИТХТ, МЭИ, ВАА, Тул.МИ, МИМЭСХ, МИИТ и МФТИ, семинар констатирует:

1. Общий уровень математической подготовки абитуриентов продолжает понижаться, причем он, безусловно, не соответствует тем требованиям, которые должны быть предъявлены к поступающим во втузы.

2. Отмеченный в резолюции бюро семинара от 12. XII 1956 г.²⁾ разрыв между потребностями вузов в математическом развитии и знаниях по математике и тем, что дает средняя школа, заметно сказался в этом году.

3. Особенно серьезное значение имеют следующие недостатки:

а) низкий уровень развития поступающих (они часто не могут разобраться в самых простых вопросах, сколько-нибудь отличающихся от трафарета, вынесенного из школы);

б) формализм знаний (неумение отличать необходимые условия от достаточных, прямые теоремы от обратных, неумение интерпретировать результаты);

в) поверхностность знаний, что является следствием перегрузки учащихся, плохих учебников, продолжающейся «процентомании», нетребовательности к учащимся, отсутствия работы с лучшими учениками;

г) недостатки программ средней школы (бедность содержания некоторых разделов тригонометрии и алгебры).

4. Дефекты в постановке преподавания особенно резко сказываются в школах периферии и в школах рабочей молодежи. Здесь отмечается значительно более низкая подготовка учеников. Особую тревогу вызывают лица, имевшие значительный перерыв в учебе.

5. Программы Министерства высшего образования для вступительных испытаний страдают некоторыми нечеткостями и неопределенностями, что ведет к произвольному установлению объема и характера экзаменационных требований.

6. Система курсов подготовки во втузы недостаточно эффективна в силу их краткосрочности и произвольности программ.

7. Не выдерживает никакой критики форма так называемого «собеседования» с абитуриентами, имеющими золотую медаль. Необходимо ввести для всех медалистов один нормальный экзамен по ведущему предмету.

¹⁾ «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 185—186.

²⁾ См. «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 204—209.

8. Зачисление во вуз производится по системе, в которой не учитываются, какие были баллы получены по главным предметам вуза, а какие по второстепенным. Необходимо ввести коэффициенты, учитывающие вес предмета в соответствии с его значимостью в данном вузе¹⁾.

9. Следует приветствовать введение письменного экзамена по математике. Однако с переходом на предлагаемую систему подсчета очков, при которой увеличивается вес математики, желательно иметь одну оценку за оба экзамена (при наличии положительной оценки за письменный экзамен).

Резолюция семинара по обсуждению первых трех выпусков сборников «Математическое просвещение»

Заслушав и обсудив первые три выпуска сборников «Математическое просвещение», семинар:

1) одобряет начинание Физматгиза и группы инициаторов по организации и выпуску в свет сборника «Математическое просвещение»;

2) отмечает, что вышедшие в свет выпуски сборника составлены в целом удачно и представляют большой интерес для математической общественности; появление сборника, несомненно, окажет большую помощь математикам-педагогам в их практической деятельности и сыграет немаловажную роль в развитии математической культуры у нас в стране;

3) считает своевременным и необходимым обратиться к соответствующим директивным органам с ходатайством о превращении сборника «Математическое просвещение» в периодический журнал;

4) в целях повышения качества сборника рекомендует его редакции в своей дальнейшей практике²⁾:

а) добиться более рельефной структуры сборника, более четко сформулировать цели и задачи каждого его раздела и те признаки, по которым материал распределяется между разделами сборника; в частности, изменить название первого раздела «Обзоры, статьи, переводы» на «Обзоры»;

б) считать одной из важнейших задач сборника публикацию материалов, излагающих в доступной для неспециалистов форме наиболее крупные достижения советской и мировой математики, а также популярные очерки основных идей, методов и проблем современной математической науки;

в) оригинальные научные статьи публиковать в форме, доступной широкому кругу читателей;

г) расширить раздел «Научно-методические сообщения», помещая в нем не только законченные статьи, касающиеся методики изложения отдельных программных вопросов различных математических курсов, но и краткие

¹⁾ Так, например, во вузах, где имеется четыре экзамена, следует принять для математики коэффициент 4, для физики — 3, для русского языка — 2, для иностранного языка — 1. Максимальное число очков будет при этом равно: $4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 50$. Полезность такого способа подсчета очков видна из следующего примера: абитуриент А. получил по математике 5, по физике 4, по русскому языку 3, по иностранному языку 3; абитуриент Б. получил соответственно 3, 3, 5 и 5. При существующей системе подсчета очков абитуриент Б. имеет 16 очков из 20 возможных, а абитуриент А. — 15. Абитуриент Б. может пройти, а абитуриенту А. будет отказано в приеме, хотя совершенно очевидно преимущество, с точки зрения подготовленности для вуза, абитуриента А. По предлагаемой системе подсчета очков абитуриента А. будет иметь 41 очко, а абитуриент Б. — 36 очков.

²⁾ Редакция «Математического просвещения» считает, что некоторые положения 4-го пункта настоящей резолюции являются спорными. (Примечание редакции.)

заметки, критикующие неудачные и пропагандирующие удачные результаты тех или иных педагогических экспериментов; считать этот раздел одним из главных разделов сборника;

д) установить корреспондентские связи с математическими кафедрами и учреждениями (центральными и периферийными) для возможно более широкого показа в разделе хроники математической жизни страны;

е) пересмотреть принцип отбора материала для раздела задач, отказавшись при этом от большого числа чрезмерно трудных задач и более доходчиво формулировать помещаемые задачи;

ж) в разделе «Математическая литература» при публикации рецензий на новые математические издания давать анализ их новизны и отличия от аналогичных изданий, вышедших ранее;

з) отказаться от практики печатания заметок на четных полосах в различных частях сборника; ввести новый раздел под названием, например, «Смесь» или «Разное»;

и) проводить более тщательное редактирование публикуемых в сборнике материалов.

чинающие устают и падают духом раньше, чем успевают получить какое-либо отчетливое понятие о том, чему их хотят обучить...

Я стараюсь изложить основы методом столь естественным, что его можно предполагать совпадающим с методом первооткрывателей, следя лишь за тем, чтобы избежать всех ошибочных попыток, которые они неизбежно должны были делать...

С целью следовать в этом сочинении путем, подобным пути первооткрывателей, я ставлю сначала задачей раскрыть перед начинающими принципы, от которых может зависеть простое измерение участков земли, доступных и недоступных расстояний и т. п. После этого я перехожу к другим исследованиям, которые в такой мере сходны с первыми, что естественная для всех людей любознательность склоняет задержаться на них. Наконец, вознаграждая эту любознательность некоторыми практическими применениями, я достигаю того, чтобы пройти всё наиболее интересное в элементарной геометрии...

Если первые авторы математических работ представляли свои открытия в форме теорем, то это было, без сомнения, для того, чтобы дать наиболее поражающую форму их результатам или для того, чтобы избавить себя от труда воспроизводить последовательность идей, руководивших ими в их исследованиях. Как бы то ни было, мне казалось значительно более уместным непрерывно занимать моих читателей решением задач, т. е. изыскивать средства для выполнения некоторой операции или открытия некоторой неизвестной истины, определяя отношение, существующее между известными величинами и величинами неизвестными, которые предложено найти. Следуя этому пути, начинающие усматривают на каждом шагу, который они делают, мотив, руководящий математиком-исследователем, и через это они могут более легко постигнуть дух открытия...».

А. М.

НОВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ

1. А. А. Мучник — Р. Фридберг. *Проблема сводимости пересчитываемых множеств.*

Общеизвестно, какое важное значение во многих областях математики имеет вопрос отыскания *алгоритма* — общего метода решения всех однотипных задач.

Многие конкретные алгоритмы были известны уже в древности (алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел). Однако точное определение алгоритма как математического понятия было дано лишь в последние десятилетия, в связи с трудностями, которые встретились при попытках решить некоторые алгоритмические проблемы математики и логики. К их числу следует отнести 10-ю проблему Гильберта, требующую дать алгоритм, позволяющий судить о существовании решения произвольного диофантова уравнения, проблемы тождества слов в группах и полугруппах¹⁾ и некоторые другие. Первая из них не решена до сих пор; для последних двух проблем доказано, что требуемых алгоритмов не существует.

Исследуя в общей форме вопрос об алгоритмической неразрешимости, американский ученый Э. Пост воспользовался *методом арифметизации*, позволяющим свести любую алгоритмическую проблему к некоторой проблеме арифметики.

Алгоритмическая проблема состоит обычно в отыскании алгоритма, перерабатывающего информацию, характеризующую данную из серии однотипных задач, в информацию, являющуюся решением данной задачи. Например, алгоритм для умножения двух многочленов $a_0x + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ и $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$ состоит в том, что по двум наборам коэффициентов (a_0, a_1, \dots, a_n) и (b_0, b_1, \dots, b_m) , дающих информацию о том, какие именно многочлены требуется перемножить, находится третий набор $(c_0, c_1, \dots, c_{n+m})$ коэффициентов, указывающий, что произведение многочленов равно $c_0x^{m+n} + c_1x^{m+n-1} + \dots + c_{m+n}$; алгоритм для нахождения произведения в этом случае дается известными формулами

$$c_0 = a_0b_0, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots$$

¹⁾ См. «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 32 и 106.

Характерным здесь является то обстоятельство, что та и другая информация выражается конечным набором символов (a_0, a_1, \dots, a_n ; b_0, b_1, \dots, b_m) и (c_0, c_1, \dots, c_{m+n}); эти символы не обязательно являются числами, ибо многочлены могут рассматриваться над произвольным кольцом. Наборы символов, выражающие информацию о данной задаче и о ее решении, зависят от рассматриваемой алгоритмической проблемы.

Сущность арифметизации состоит в том, что символы и возможные наборы символов нумеруются так, что по натуральному числу — номеру алгоритмически находится соответствующий символ (набор символов) и обратно. Так, например, в случае проблемы нахождения общего наибольшего делителя произвольного числа n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n информация о том, какие числа рассматриваются, может быть задана одним натуральным числом $N = 2^{a_1-1} \cdot 3^{a_2-1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}-1} \cdot p_n^{a_n}$, где p_n есть n -е простое число; обратно, — число N сразу указывает натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n .

Всякая алгоритмическая проблема определяет некоторую арифметическую функцию, т. е. функцию от натурального аргумента с натуральными значениями. Эта функция преобразует номер набора символов, дающего информацию о данной задаче, в номер набора символов, выражающего решение этой задачи. [В случае, рассмотренном в последнем примере, это будет функция, сопоставляющая числу $N = 2^{a_1-1} \cdot 3^{a_2-1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}-1} \cdot p_n^{a_n}$ общий наибольший делитель $f(N)$ чисел a_1, a_2, \dots, a_n .] Теперь проблема состоит в отыскании алгоритма для вычисления такой функции.

Часто встречаются алгоритмические проблемы, состоящие в распознавании некоторого свойства объектов определенной природы. Так, в случае проблемы тождества слов в группах¹⁾ подобным объектом является пара слов, а интересующим нас свойством — свойство двух слов быть равными. Проблемы подобного рода называются *проблемами разрешимости*. Доказано, что произвольная алгоритмическая проблема может быть сведена к некоторой проблеме разрешимости.

После арифметизации проблемы разрешимости определится множество E натуральных чисел — номеров объектов, обладающих рассматриваемым свойством. Проблема разрешимости сводится к отысканию алгоритма, позволяющего для любого числа указать, принадлежит ли оно множеству E или нет. Эта проблема называется *проблемой разрешимости множества E* . Если такой алгоритм существует, множество E называется *рекурсивным*.

В подавляющем большинстве случаев проблемы разрешимости приводят к множествам E , все элементы которых могут быть расположены в таком порядке, что их можно алгоритмически вычислять один за другим (в таком случае говорят, что множество E расположено в *рекурсивную последовательность*). Такие множества называются

¹⁾ См. предыдущую сноску.

перечислимыми. Алгоритмически неразрешимые проблемы приводят к перечислимым нерекурсивным множествам. Впервые примеры таких множеств непосредственно были построены Э. Постом, положившим начало теории перечислимых множеств.

В теории алгоритмов одну проблему часто удается свести к другой и иногда тем самым решить исходную проблему. Так была доказана неразрешимость проблем тождества в полугруппах и группах. Сведение различных проблем друг к другу встречается, конечно, во всех областях математики. Однако для теории алгоритмов характерно, что *сама сводимость проблем является алгоритмической*, т. е. существует алгоритм, позволяющий получать из алгоритма для решения второй проблемы алгоритм для решения первой проблемы. Так, например, в случае двух функций $f(n)$ и $g(m)$, связанных формулой

$$f(n) = \sum_{k \leq n} g(k),$$

проблема вычислимости функции $f(n)$ сводится к проблеме вычислимости функции $g(m)$, а приведенная формула дает алгоритм для вычисления $f(n)$, если известен алгоритм для вычисления значений $g(m)$.

Принадлежащее английскому математику Тюрингу строгое определение понятия алгоритмической сводимости проблем является вторым после уточнения понятия алгоритма крупнейшим достижением теории алгоритмов.

Если проблемы \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 алгоритмически сводятся друг к другу, то говорят, что они имеют *одну и ту же степень неразрешимости*; в этом случае или обе проблемы допускают алгоритмическое решение, или обе они алгоритмически неразрешимы. Если проблема \mathcal{M} сводится к проблеме \mathcal{B} , а \mathcal{B} не сводится к \mathcal{M} , то говорят, что проблема \mathcal{M} имеет *меньшую степень неразрешимости*, чем проблема \mathcal{B} ; при этом неразрешимость проблемы \mathcal{B} повлечет за собой и неразрешимость проблемы \mathcal{M} , но не наоборот.

Э. Пост в 1944 г. сформулировал следующую *проблему сводимости* перечислимых множеств [3]: *сводятся ли друг к другу все различные неразрешимые проблемы разрешимости перечислимых множеств?* В случае положительного ответа на этот вопрос неразрешимость проблемы разрешимости любого перечислимого нерекурсивного множества E (а практически — неразрешимость почти всякой алгоритмической проблемы) можно было бы доказать путем сведения к этому множеству некоторого определенного перечислимого множества, нерекурсивность которого уже доказана. Однако оказалось, что существует бесконечно много несводящихся друг к другу проблем неразрешимости перечислимых множеств. Более того, для каждого перечислимого нерекурсивного множества G существует перечислимое нерекурсивное множество H меньшей степени неразрешимости. Следовательно, существует бесконечная убывающая цепочка степеней неразрешимости перечислимых нерекурсивных множеств, а следовательно, и бесконеч-

ная цепочка алгоритмически неразрешимых проблем разной степени неразрешимости.

Решение проблемы Поста путем построения двух не сводящихся друг к другу перечислимых множеств было получено независимо и одновременно различными способами американским математиком Р. Фридбергом [2] и автором настоящей заметки [1]. Дальнейшее исследование степеней неразрешимости перечислимых множеств и алгоритмических проблем представляет большой интерес для теории алгоритмов и ее приложений.

Литература

1. А. А. Мучник, Неразрешимость проблемы сводимости, ДАН СССР 108, № 2 (1956), стр. 194—197.
2. R. M. Friedberg, The solution of Post's problem, Bull. of the Amer. Math. Soc. 62, № 3 (1956), стр. 260; Two recursive enumerable sets of incomparable degrees, Roc. Nat. Acad. Sci. USA 43, № 2 (1957), стр. 236—238.
3. E. L. Post, Recursively enumerable sets, Bull. of the Amer. Math. Soc. 50 (1944), стр. 284—316.
4. С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957.
5. Б. А. Трахтенброт, Алгоритмы и машинное решение задач, М., 1957.

А. А. Мучник

2. М. К. Фаре. Эквивалентность обыкновенных линейных дифференциальных операторов.

Из основного курса высшей алгебры известно, что две квадратные матрицы L и M одинакового порядка в некоторых случаях являются эквивалентными, т. е. между ними имеется соотношение

$$L = TMT^{-1}, \quad (1)$$

где T — квадратная матрица того же порядка с отличным от нуля определителем. Необходимым и достаточным условием такой эквивалентности L и M является равенство их элементарных делителей.

Можно установить эквивалентность любых двух дифференциальных выражений (операторов)

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_0(x), \quad a < x < b \quad (2)$$

и

$$M = \frac{d^m}{dx^m} + q_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + q_0(x), \quad c < x < d \quad (3)$$

с непрерывными (комплексными или действительными) коэффициентами, при том единственном условии, что их порядки равны ($m = n$).

Равенство (1) для матриц (n -го порядка) может быть доказано геометрически (см., например, [2]): L и M истолковываются как матрицы одного и того же линейного преобразования (оператора) n -мерного аффинного пространства $R^{(n)}$ в разных базисах, T — как матрица, связывающая (преобразующая) эти базисы. Посмотрим с этой точки зрения и на задачу установления эквивалентности двух дифференци-

альных операторов (2) и (3). Обстановка здесь сложнее, чем в случае матриц: ведь матрицей (как линейным оператором) можно «действовать» на любой вектор пространства $R^{(n)}$ и при том не только один раз, но и повторно — любое число раз (что как раз очень важно при построении геометрической теории элементарных делителей); а дифференциальным оператором (2) можно действовать только на n -кратно дифференцируемые функции $y(x)$, причем требование повторной применимости L к $Ly(x)$, к $LLy(x) = L^2y(x)$ и т. д. накладывает на функцию $y(x)$ еще дополнительные условия и при том такие, которые могут оказаться не совместимыми с требованием применимости другого оператора (3) к той же функции $y(x)$, к $My(x)$ и т. д. Это обстоятельство очень легко проиллюстрировать на примере функции

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} z(x), \quad (4)$$

где $z(x)$ дифференцируема любое число раз, а $p(x)$ непрерывна, но не дифференцируема. Тогда

$$\frac{d}{dx}y(x) = y'(x) = -p(x)e^{-\int p(x) dx} z(x) + e^{-\int p(x) dx} z'(x)$$

и, следовательно, дальнейшее применение оператора $M = \frac{d}{dx}$ невозможно. В то же время

$$\frac{d}{dx}y(x) + p(x)y(x) = e^{-\int p(x) dx} z'(x),$$

т. е. оператор $L = \frac{d}{dx} + p(x)$ после применения к $y(x)$ дает функцию

$$Ly(x) = e^{-\int p(x) dx} z'(x), \quad (5)$$

аналогичную исходной функции (4) — с заменой $z(x)$ на $z'(x)$. Поэтому к (5) возможно применить L еще раз и, продолжая так же, прийти к формуле

$$L^q y(x) = e^{-\int p(x) dx} z^{(q)}(x)$$

(для любого $q = 0, 1, 2, \dots$), показывающей, что $y(x)$ допускает применение L любое число раз. Но она не допускает применения

$M = \frac{d}{dx}$ даже дважды.

Это обстоятельство требует обобщения того геометрического метода, который используется в теории матриц, а именно рассмотрения каждого из операторов (2) и (3) в своем пространстве; мы обозначим их соответственно A_L и A_M . Построим, например, пространство A_L : оно будет состоять из сумм всех рядов¹⁾

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x, x_0), \quad (6)$$

¹⁾ Совокупность A_L имеет характер линейного векторного пространства, но она не образует банахова пространства, представляя пример более общих, так называемых линейных топологических пространств.

коэффициенты которых должны удовлетворять оценкам вида

$$|a_k| \leq C^k k! \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

а «базисные функции» $f_k(x, x_0)$ определяются из уравнений

$$Lf_k(x, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } k < n, \\ f_{k-n}(x, x_0) & \text{при } k \geq n \end{cases} \quad (8)$$

при следующих начальных условиях в точке x_0 ($r = 0, 1, \dots, n-1$):

$$\left. \frac{d^r}{dx^r} f_k(x, x_0) \right|_{x=x_0} = \begin{cases} 1, & r = k < n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Построим теперь для оператора M аналогичное пространство A_M функций

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k g_k(x, x_1) \quad (c < x_1 < d). \quad (9)$$

Так как характер оценок (7) не связан с оператором L или M , то между функциями (6) и (9) устанавливается взаимно однозначное соответствие требованием $a_k = b_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим это соответствие так: $y(x) = Tz(x)$.

Одним из свойств рядов вида (6) является возможность почленного применения к ним оператора L и тогда вследствие (8):

$$Ly(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k f_{k-n}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} f_k(x, x_0);$$

аналогично,

$$Mz(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m} g_k(x, x_1).$$

Пусть теперь $m = n$; тогда из $y(x) = Tz(x)$ (т. е. $a_k \equiv b_k$) следует $a_{k+n} \equiv b_{k+m}$, т. е. $Ly(x) = TMz(x)$. Подставив сюда $z(x) = T^{-1}y(x)$ (T обратим!), получим $Ly(x) = TMT^{-1}y(x)$, т. е. $L = TMT^{-1}$, что и требовалось доказать.

Иллюстрацию этих построений для операторов $L = \frac{d}{dx} + p(x)$ и $M = \frac{d}{dx}$ дает формула (4), если в ней $z(x)$ пробегает функции

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_1)^k}{k!}$$

(т. е. функции, аналитические в окрестности x_1); тогда формула (4) и определяет искомое преобразование T .

Л и т е р а т у р а

1. М. К. Фаге, Операторно-аналитические функции одной независимой переменной, Труды Москов. матем. общества, т. 7, 1957.
2. О. Шрейер и Е. Шпернер, Теория матриц, М.—Л., 1936.

М. К. Фаге

3. Д. Оман. Решение задачи Банга о покрытии выпуклых фигур.

В первом выпуске «Математического просвещения»¹⁾ сообщалось о решении датским математиком Т. Бангом «проблемы дощечек» А. Тарского, формулирующей следующим образом:

Доказать, что если выпуклая фигура F полностью покрыта n полосами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, ширина которых соответственно равна h_1, h_2, \dots, h_n , то сумма $h_1 + h_2 + \dots + h_n$ не может быть меньше ширины Δ самой узкой полосы (одной!), которой можно покрыть F .

Там же указывалось, что Банг [2] также предложил сравнивать ширину каждой из полос σ_i ($i=1, 2, \dots, n$) не с «наименьшей шириной» Δ фигуры F , а с ее шириной в направлении полосы σ_i , т. е. с шириной Δ_i самой узкой параллельной σ_i полосы, которой можно покрыть F . Другими словами, он предложил попытаться оценить не сумму

$$\frac{h_1}{\Delta} + \frac{h_2}{\Delta} + \dots + \frac{h_n}{\Delta} \quad (1)$$

(которая, согласно доказанной им теореме, не может превосходить 1), а меньшую сумму

$$\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \dots + \frac{h_n}{\Delta_n}. \quad (2)$$

Банг предполагал, что и сумма (2) не превзойдет единицы, но указывал, что общее доказательство этого предложения, по-видимому, не слишком просто; в [3] формулировались некоторые сложные элементарно-геометрические задачи, к которым сводится эта проблема.

Недавно утверждение Банга было полностью доказано немецким геометром Д. Оманом [1]. А именно, Оман показал, что *если выпуклая фигура F полностью покрыта n выпуклыми фигурами f_1, f_2, \dots, f_n , то сумма отношений*

$$\frac{\delta_1}{\Delta_1} + \frac{\delta_2}{\Delta_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\Delta_n}, \quad (3)$$

где δ_i — ширина фигуры f_i в каком-то (безразлично каком!) направлении, а Δ_i — ширина F в том же самом направлении, никогда не

¹⁾ Заметка [3] по нашему списку литературы.

презойдет единицы¹⁾; принимая здесь, что фигуры f_1, f_2, \dots, f_n суть полосы, и что направления выбираются в соответствии с направлениями этих полос, мы приходим к выражению (2). Таким образом, предложение Омана является более сильным, чем утверждение Банга о полосах («дощечках»); любопытно, что это усиление формулировки оказалось существенно полезным для ее доказательства²⁾.

Идею доказательства Омана мы проиллюстрируем на играющем основную роль в его рассуждениях случае покрытия плоской фигуры F двумя меньшими фигурами f_1 и f_2 . Выбор фигур F и f_i Оман ограничивает некоторыми предположениями регулярности: он принимает, что каждая из этих фигур ограничена гладкой выпуклой кривой, не содержащей прямолинейных отрезков (т. е. что в каждой граничной точке фигуры к ней можно провести единственную касательную, причем проведенные в разных точках касательные не совпадают между собой). Легко понять, что это ограничение не является особенно существенным — ведь каждую негладкую выпуклую фигуру всегда можно «округлить», почти не изменяя ее размеров.

Рассмотрим теперь параллельные полосы Σ_1 и σ_1 ширины, соответственно, Δ_1 и δ_1 , покрывающие фигуры F и f_1 ; в силу сделанного предположения, эти полосы однозначно определяют хорды P_1Q_1 и p_1q_1 фигур, соединяющие точки соприкосновения с фигурами граничных прямых полос (рис. 1). Естественно считать, что направления полос выбраны так, чтобы отношение $\frac{\delta_1}{\Delta_1}$ было возможно меньшим (ведь нам надо оценить наименьшее возможное значение суммы (3) при всевозможных выборах направлений); при этом, как можно показать, хорды P_1Q_1 и p_1q_1 обязательно будут параллельны³⁾. Значит, отношение $\frac{\delta_1}{\Delta_1}$ будет равно отношению $\frac{p_1q_1}{P_1Q_1}$, которым мы и заменим $\frac{\delta_1}{\Delta_1}$ в сумме (3). Таким образом, задача сведется к доказательству неравенства

$$\frac{p_1q_1}{P_1Q_1} + \frac{\delta_2}{\Delta_2} \geq 1. \quad (4)$$

Рассмотрим как покрывающие F и f параллельные полосы Σ_1 и σ_1 ширины соответственно Δ_1 и δ_1 , так и покрывающие F и f_2 полосы Σ_2 и σ_2 ширины соответственно Δ_2 и δ_2 ; так как f_1 и f_2 покрывают F , то

¹⁾ На самом деле результат Д. Омана является несколько более общим: как и результат Банга, он относится к выпуклым телам в n -мерном евклидовом пространстве.

²⁾ Ср. утверждение Д. Поля «доказать больше иногда легче» в его замечательной книге «Математика и правдоподобные рассуждения», М., 1957, стр. 146.

³⁾ Пусть, например, F есть круг, а f_1 — эллипс; в таком случае направления полос следует выбирать так, чтобы ширина δ_1 была наименьшей. Но отсюда следует, что хорда p_1q_1 будет перпендикулярна к полосе σ_1 (p_1q_1 — меньшая ось эллипса!) и, следовательно, параллельна хорде P_1Q_1 .

и полосы σ_1 и σ_2 покрывают F . Так как направления хорд P_1Q_1 и p_1q_1 и полос Σ_2 и σ_2 не играют роли в нашей задаче (задача — аффинная!), то мы можем считать эти направления перпендикулярными. Произведем теперь так называемую *симметризацию Штейнера*, т. е. заменим фигуры F и σ_1 симметричными фигурами F^* и σ_1^* , сдвинув все их хорды, параллельные прямой P_1Q_1 , так, чтобы они делились пополам некоторой фиксированной прямой, перпендикулярной к этому направлению; при этом мы придем к рис. 2.

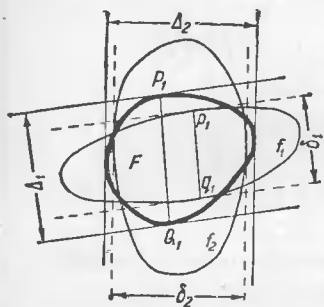


Рис. 1.

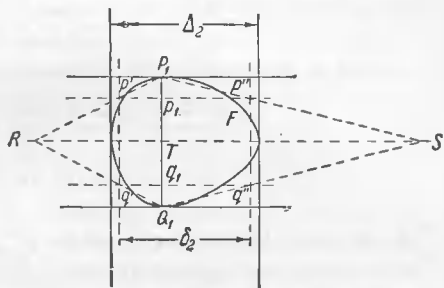


Рис. 2.

Неравенство (4) с очевидностью вытекает из того, что (см. рис. 2)

$$\frac{p'q'}{P_1Q_1} + \frac{p'p''}{RS} = \frac{p_1T}{P_1T} + \frac{P_1p_1}{P_1T} = 1$$

и

$$\frac{p'q'}{P_1Q_1} = \frac{p_1q_1}{P_1Q_1}, \quad \frac{p'p''}{RS} = \frac{\delta_2}{RS} \leq \frac{\delta_2}{\Delta_2}.$$

Литература

1. D. Ohmann, Kurzer Beweis einer Abschätzung für die Breite bei Überdeckung durch convexe Körper, Arch. Math. 8 (1957), стр. 150—152.
2. Th. Bang, Some remarks on the union on convex bodis. 12 Skand. Math. Kongr., Lund., 1953; Lund., 1954, стр. 5—11.
3. И. М. Яглом, Т. Банг—В. Фенхель, Решение одной задачи о покрытии выпуклых фигур, «Математическое просвещение», вып. 1, «Новости математической науки», стр. 214—218.

И. М. Яглом

ОЦЕНКА ОШИБКИ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своими тремя производными в интервале $a \leq x \leq b$ и если при этом вторая и третья производные сохраняют знак в этом интервале, то ошибка, возникающая при линейном интерполировании, т. е. разность

$$\rho = \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right) - f(x),$$

лежит в интервале (A, B) , где

$$A = \frac{(b - x)(a - x)}{b - a} \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(a) \right),$$

$$B = \frac{(b - x)(a - x)}{b - a} \left(f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

[A меньше (больше) B , если $f'''(x)$ положительно (отрицательно) на интервале (a, b)].

Более запоминаемая, но менее точная оценка возникает из точной формулы

$$\rho = \frac{1}{2} (b - x)(x - a) f''(\theta),$$

если использовать экстремальные значения для $f''(x)$ в интервале (a, b) .

Доказательства см. в двух заметках П. Гамеля (P. Hume), *American Math. Monthly*, 1946, стр. 364 и 1947 г., стр. 218).

А. Л.

V. ЗАДАЧИ

Под редакцией И. М. Яглома

ЗАДАЧИ

1. Задачи по элементарной математике

А. Задачи средней трудности

30. Найти частное от деления на 2 следующего числа:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},$$

в записи которого фигурирует n двоек.

31. Доказать, что если треугольник T , плоскости π является ортогональной проекцией на π правильного треугольника T , расположенного вне этой плоскости, то его можно полностью покрыть треугольником, равным T . Сохраняет ли силу утверждение задачи в том случае, если треугольник T неправильный?

В. А. Залгаллер (Ленинград)

32. Можно ли из последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ выбрать числа, составляющие бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{1}{5}$? А $\frac{1}{7}$?

33. Что можно сказать о теле, имеющем две различные оси вращения?

34. Внутри шара радиуса 3 расположено n меньших шаров, общая сумма радиусов которых равна 25 (внутренние шары могут пересекаться или даже совпадать). Доказать, что для каждой плоскости пространства найдется такая параллельная ей плоскость, которая пересекает не менее 9 внутренних шаров.

Б. М. Шайн (Саратов)

35. «Арифметический треугольник»

1				
1	1			
1	3	1		
1	7	6	1	
1	15	25	10	1
...
...

составляется по следующему закону: если $A_{n,k}$ есть k -е число n -й строки ($n=1, 2, 3, \dots; k=1, 2, \dots, n$), то

$$A_{n,k} = 1 \text{ при } k=1 \text{ или } k=n;$$

$$A_{n,k} = A_{n-1,k-1} + kA_{n-1,k} \text{ при } 1 < k < n.$$

Найти выражение для общего члена $A_{n,k}$ треугольника (зависящее, разумеется от n и k).

Л. Н. Бескин (Москва)

36. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов может быть в городе из N домов? Заборы могут отгораживать как отдельные дома, так и группы домов, в том числе и весь город; не допускаются лишь заборы, не отгораживающие ни одного дома.

Е. М. Ландис (Москва)

37. Просуммировать ряд ($a, b > 0$)

$$\frac{ab}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)(a^3+b^3)} + \dots + \frac{a^n b^n}{(a^n+b^n)(a^{n+1}+b^{n+1})}.$$

Э. Ясиновский (Куйбышев)

38. Что можно сказать о треугольнике, если известно, что в него

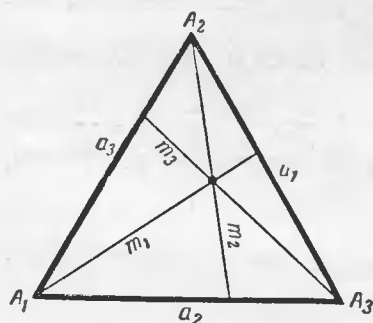


Рис. 1.

можно вписать два различных по положению, но равных по величине квадрата? (Вписанный квадрат должен целиком лежать внутри треугольника; две его вершины принадлежат одной из сторон треугольника, а две другие — остальным двум сторонам.)

З. А. Скопец (Ярославль)

39. Доказать следующую теорему (в определенном смысле двойственную известной теореме Чебы): если прямые m_1 , m_2 и m_3 , проходящие через вершины A_1 , A_2 и A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ со сторонами a_1 , a_2 , a_3 , пересекаются в одной точке (рис. 1) или параллельны, то

$$\frac{\sin \angle (a_3, m_1)}{\sin \angle (a_2, m_1)} \cdot \frac{\sin \angle (a_1, m_2)}{\sin \angle (a_3, m_2)} \cdot \frac{\sin \angle (a_2, m_3)}{\sin \angle (a_1, m_3)} = 1$$

(здесь, например, $\angle(a_3, m_1)$ — угол, образованный прямой m_1 со стороной a_3 треугольника).

В. Ф. Иванов (Сан Карлос, Калифорния, США)

Б. Задачи повышенной трудности

21. Рассмотрим множество неотрицательных тригонометрических многочленов

$$P(x) = a + b \cos x + c \cos 2x$$

(т. е. таких, что $P(x) \geq 0$ при всех x) с неотрицательными коэффициентами a, b, c и таких, что $a < b$. [Примером может служить, скажем, многочлен $3 + 4 \cos x + \cos 2x = 2(1 + \cos x)^2$.] Какое наименьшее значение может принимать для подобных многочленов отношение

$$r = \frac{a+b+c}{b-a}?$$

22. Доказать, что из 981 различных чисел, не превосходящих 1958, всегда можно выбрать три таких числа, что сумма двух из них равна третьему. Останется ли в силе это утверждение, если заменить число 981 на 980?

23. Доказать, что если $a^2 - 4b$, где a и b — целые отличные от нуля числа, является полным квадратом, то $a^3 - 3ab$ не может быть полным кубом.

В. В. Ушаков (Старый Оскол)

24. Доказать, что если модуль комплексного числа z равен 1, то модуль многочлена

$$Q_n(z) = z^n + n^2 z^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right)^2 z^{n-2} + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 z^{n-3} + \dots + 1$$

не может превышать

$$\left| \frac{(\sqrt{z} + 1)^{2n-2} (z + 1)}{n} \right|$$

(здесь \sqrt{z} означает тот из корней квадратных из z , вещественная часть которого неотрицательна).

Э. Э. Балаш (Москва)

25. На плоскости даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 такие, что внешние касательные к S_1 и S_2 и внешние касательные к S_3 и S_4 пересекаются в одной точке A , а внешние касательные к S_2 и S_3 и внешние касательные к S_1 и S_4 — в одной точке B . Доказать, что

а) внутренние касательные к S_1 и S_3 и внутренние касательные к S_2 и S_4 пересекаются в одной точке C ;

б) точка D пересечения внешних касательных к S_2 и S_4 и точка E пересечения внешних касательных к S_1 и S_3 лежат на прямой AB ;

в) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$, где r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы окружностей S_1, S_2, S_3, S_4 .

В. Паламо́дов (Москва)

В. Проблемы

7. Из прямоугольного листа со сторонами l, L требуется выкроить возможно большее число одинаковых прямоугольников со сторонами a, b . Раскрой должен осуществляться последовательно выполняемыми разрезами, идущими через весь разрезаемый в этот момент прямоугольный кусок материала параллельно одной из его сторон. Предлагается указать способ вычисления по $l, L; a, b$ наибольшего числа прямоугольников, которое удастся получить¹⁾.

Л. В. Канторович (Ленинград)

8. Как известно, сочетаниями из n элементов (a_1, a_2, \dots, a_n) по m называются такие соединения из n элементов по m , которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом. *Обобщенными сочетаниями k -го порядка* из m элементов по n назовем такие соединения из m элементов по n , которые отличаются друг от друга по крайней мере k элементами ($n \geq m \geq k \geq 1$).

Как нетрудно видеть, при $k > 1$ число таких сочетаний не определяется однозначно числами n, m и k ; так, при $n=6, m=3, k=2$ можно составить

а) два обобщенных сочетания (a_1, a_2, a_3) и (a_4, a_5, a_6) ;

б) три обобщенных сочетания $(a_1, a_2, a_3), (a_3, a_4, a_5)$ и (a_1, a_5, a_6) .

Требуется найти наибольшее и наименьшее число обобщенных сочетаний k -го порядка из n элементов по m .

З. А. Скопец (Ярославль)

9. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная, которую мы будем считать подвижной, составленной из жестких стержней, скрепленных шарнирами. Спрашивается, всегда ли можно расправить эту ломаную в выпуклую так, чтобы она в процессе деформации ни разу не пересекла себя?

Решение этой проблемы не может быть особенно простым, так как из положительного ответа на поставленный вопрос вытекает, в частности, известная теорема Жордана для многоугольников.

10. Пусть t — треугольник наибольшего возможного периметра, вписанный в выпуклую фигуру F , T — треугольник наименьшего периметра, описанный вокруг фигуры F ; p и P — соответственно периметры t и T , L — периметр F (длина ограничивающей F кривой). Ясно, что $\frac{p}{L} \leq 1, \frac{P}{L} \geq 1$ ($\frac{p}{L} = \frac{P}{L} = 1$, если F есть треугольник);

¹⁾ Относительно этого круга вопросов см. Л. В. Канторович и В. А. Залгаллер, Расчет рационального раскроя промышленных материалов, Леиздат, 1951, стр. 117—130.

спрашивается, каково наименьшее возможное значение отношения $\frac{P}{L}$ и наибольшее возможное значение $\frac{P}{L}$?

По поводу аналогичных задач, относящихся к площадям, см. Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., 1958, § 4, гл. II.

2. Задачи по высшей математике

А. Задачи средней трудности

24. Доказать, что формула для вычисления угла φ между двумя прямыми в пространстве, заданными (в прямоугольной системе координат) направляющими косинусами $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$ и $(\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$ может быть записана в форме, аналогичной формуле для расстояния между двумя точками:

$$2 \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)^2 + (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)^2 + (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2)^2}.$$

В. Ф. Иванов (Сан Карлос, Калифорния, США)

25. Примем диагональ d квадрата за ось x ; если $l(x_0)$ есть длина отрезка, отсекаемого квадратом на перпендикуляре к d , отвечающем значению $x = x_0$, то график функции $y = l(x)$ будет, очевидно, иметь вид, изображенный на рис. 2. Аналогично этому можно принять за ось x диагональ d куба и обозначить через $S(x_0)$ площадь сечения куба перпендикулярной к d плоскостью, отвечающей значению $x = x_0$. Спрашивается, каким будет при этом график функции $S(x)$?

И. М. Гельфанд (Москва)

См. также более общую задачу 21 повышенной трудности, стр. 249 наст. выпуска.

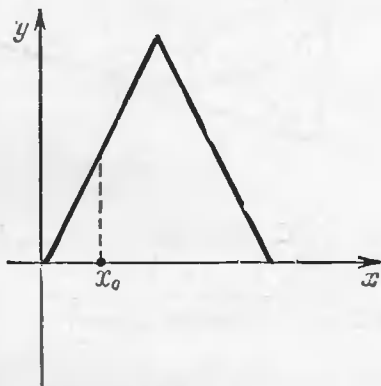


Рис. 2.

26. Пусть $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$ — n (дифференцируемых) функций от аргументов x_1, x_2, \dots, x_n ; пусть еще в окрестности каких-то значений $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ выполняются неравенства $f_1(x_1) < f_2(x_2) < \dots < f_n(x_n)$. Доказать, что если тождественно по x_1, x_2, \dots, x_n

$$\frac{f'_1}{(f_1 - f_2)(f_1 - f_3) \dots (f_1 - f_n)} + \frac{f'_2}{(f_2 - f_1)(f_2 - f_3) \dots (f_2 - f_n)} + \dots + \frac{f'_n}{(f_n - f_1)(f_n - f_2) \dots (f_n - f_{n-1})} \equiv 0,$$

то функции $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$f'_1 = P(f_1), f'_2 = -P(f_2), f'_3 = P(f_3), \dots, f'_n = (-1)^{n-1} P(f_n),$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен степени $\leq n-2$ (один и тот же для всех функций).

А. С. Солодовников (Коломна)

27. Пусть выпуклая замкнутая кривая Γ и окружность S радиуса r лежат по одну сторону от своей общей касательной. Кривая Γ имеет в каждой своей точке радиус кривизны ρ . Доказать, что если всюду $\rho \leq r$, то ни одна точка Γ не лежит вне S ; напротив, если всюду $\rho > r$, то ни одна точка S не лежит вне Γ .

Ю. Т. Медведев
(Москва)

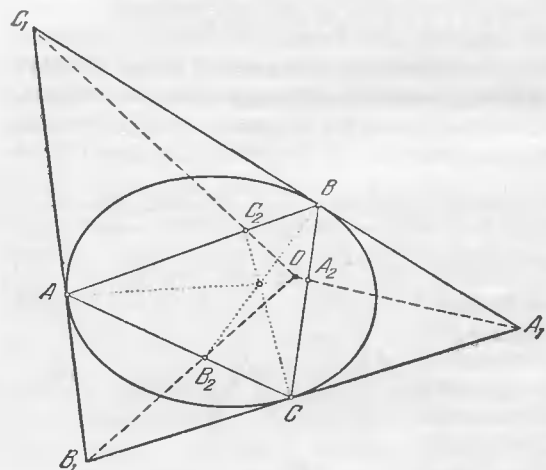


Рис. 3.

28. Пусть треугольник ABC вписан в кривую второго порядка S , а треугольник $A_1B_1C_1$ образован касательными к этой кривой в точках A , B , C ; соединим произвольную точку O плоскости с вершинами треугольника $A_1B_1C_1$ и точки пересечения полученных прямых с соответствующими сторонами треуголь-

ника ABC обозначим через A_2 , B_2 и C_2 (рис. 3). Доказать, что прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

Какой смысл получает эта теорема, если принять кривую S за абсолют модели Клейна плоскости Лобачевского?

В. Г. Копп (Казань)

Б. Задачи повышенной трудности

20. Дана сложная функция $F(x) \equiv f[g(x)]$; i -ю производную от $f(g)$ обозначим через $D^i f$, а производные от $g(x)$ — через g' , g'' , ..., $g^{(n)}$. Доказать следующую символическую формулу:

$$F^{(n)}(x) = \begin{vmatrix} g' & g'' & g''' & g^{IV} & \dots & g^{(n)} \\ -1 & g'D & 2g''D & 3g'''D & \dots & C_{n-1}^{n-1}g^{(n-1)}D \\ 0 & -1 & g'D & 3g''D & \dots & C_{n-1}^2g^{(n-2)}D \\ 0 & 0 & -1 & g'D & \dots & C_{n-1}^3g^{(n-3)}D \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & g'D \end{vmatrix} Df.$$

В. Ф. Иванов (СПбА) [Займств.]

21. Пусть M есть n -мерный куб $0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n$; N есть $(n-1)$ -мерный многогранник, получающийся при пересечении M гиперплоскостью $x_1 + x_2 + \dots + x_n = z$, перпендикулярной к главной диагонали куба; $V_n(z)$ есть $((n-1)$ -мерный) объем N . Найти функцию $V_n(z)$.

И. М. Гельфанд (Москва)

Ср. задачу 25 средней трудности на стр. 247.

22. Обозначим через $\tau(\nu; r, d)$ количество делителей числа ν , заключающихся в арифметической прогрессии с первым членом r и разностью d . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=1}^n (\tau(\nu; r_1, d) - \tau(\nu; r_2, d))}{n} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} + \frac{1}{d} \int_0^1 \frac{x^{r_1/d} - x^{r_2/d}}{1-x} dx.$$

Отметим два частных случая:

1°. При $r_1 = 1, r_2 = 2, d = 2$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=1}^n (U_{\nu} - G_{\nu})}{n} = \ln 2,$$

где U_{ν} и G_{ν} — количества нечетных и четных делителей ν^1);

2°. При $r_1 = 1, r_2 = 3, d = 4$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=1}^n (U_{\nu}^* - G_{\nu}^*)}{n} = \frac{\pi}{4},$$

где U_{ν}^* и G_{ν}^* суть количества нечетных делителей ν , имеющих, соответственно, форму $4k+1$ и $4k-1$.

И. И. Жогин (Шадринск)

23. Если $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ регулярна в круге $|z| < 1$ и $f(z) \neq 0, |f(z)| \leq 1$, то

$$|a_1| \leq 2 |a_0| \ln \frac{1}{|a_0|} \text{ и } \max |a_0 + a_1| \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

В. И. Левин (Москва)

¹⁾ См. Г. Полна и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. I, М., 1956, отдел II, задача 47.

В. Проблемы

7. Рассмотрим эллипсоид E с центром в начале координат и полуосями λ, μ, ν , как-то расположенный в пространстве. При сжатии по осям координат

$x' = ax, y' = by, z' = cz$; a, b, c — фиксированные числа, эллипсоид переходит в новый эллипсоид с полуосями λ', μ', ν' ; при этом λ', μ' и ν' зависят от расположения эллипсоида E . Спрашивается, какие значения λ', μ', ν' могут при этом получиться?

Условимся характеризовать тройку чисел λ', μ', ν' вектором \mathbf{z} трехмерного пространства с координатами $(\ln \lambda', \ln \mu', \ln \nu')$. Шесть возможных значений вектора \mathbf{z} указываются сразу — они отвечают таким расположениям эллипсоида E , при которых его оси направлены по осям координат (любая из трех осей эллипсоида направлена по оси x и любая из двух оставшихся — по оси y). Это суть векторы

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{r} + \mathbf{t}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

где

$$\mathbf{r} = (\ln \lambda, \ln \mu, \ln \nu) \text{ и } \mathbf{t}_1 = (\ln a, \ln b, \ln c), \mathbf{t}_2 = (\ln a, \ln c, \ln b), \\ \mathbf{t}_3 = (\ln b, \ln a, \ln c), \dots, \mathbf{t}_6 = (\ln c, \ln b, \ln a).$$

Утверждается, что концы всех возможных векторов \mathbf{z} заполняют выпуклый многогранник — выпуклую оболочку шести точек, характеризующихся радиусами-векторами \mathbf{z}_i ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Аналогично обстоит дело и в n -мерном пространстве.

Более сложным является вопрос о распределении вероятностей для векторной случайной величины \mathbf{z} ; при этом все положения эллипсоида E в пространстве считаются равновероятными. Это распределение вероятностей удалось найти только для некоторых частных случаев¹⁾; решение задачи в общем случае было бы весьма интересно.

И. М. Гельфанд (Москва)

8. Пусть $f_n(x, y)$ — семейство функций, заданных на единичном квадрате $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ и равномерно стремящихся к нулю; кроме того известно, что на этом квадрате равномерно сходятся к нулю и частные производные $\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}$. Следует ли отсюда, что также и функции $\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y}$ равномерно сходятся к нулю²⁾?

Г. Е. Шилов (Москва)

¹⁾ См. по этому поводу Ф. А. Березин, И. М. Гельфанд, Несколько замечаний по поводу сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Московского Математического общества 5, 1957, стр. 328—334.

²⁾ Заметим, что если семейство функций $f_n(x, y)$ сходится к нулю в среднем квадратичном и если дополнительно также сходится к нулю $\Delta f_n =$

9. Пусть $f(x)$ — произвольный многочлен не выше второй степени; x_0, x_1, x_2 — три различных значения аргумента; f_0, f_1, f_2 — соответ-

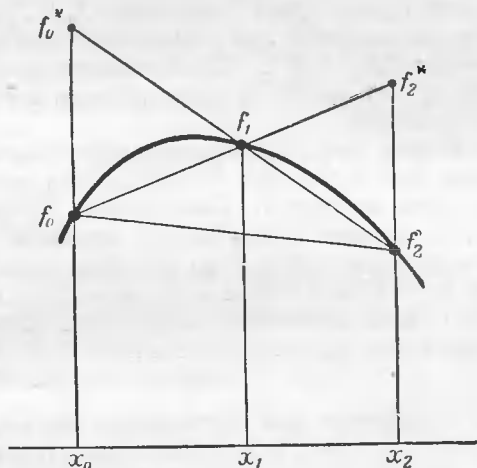


Рис. 4.

ствующие значения функции $f(x)$. Элементарным путем нетрудно получить квадратурную формулу

$$\int_{x_0}^{x_2} f dx = \frac{x_2 - x_0}{6} \left[\frac{2x_0 - 3x_1 + x_2}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{(x_2 - x_0)^2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} f_1 + \right. \\ \left. + \frac{x_0 - 3x_1 + 2x_2}{x_2 - x_1} f_2 \right].$$

Если $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$, то она переходит в известную формулу Симпсона.

Положим

$$f_0^* = \frac{(x_0 - x_1)f_2 - (x_0 - x_2)f_1}{x_2 - x_1}, \quad f_2^* = \frac{(x_2 - x_0)f_1 - (x_2 - x_1)f_0}{x_1 - x_0}.$$

Тогда, как легко убедиться, формулу можно переписать в виде

$$\int_{x_0}^{x_2} f dx = \frac{1}{3} (x_2 - x_0) \left(\frac{f_0 + f_2}{2} + \frac{f_0 + f_1^*}{2} + \frac{f_0^* + f_2}{2} \right).$$

Эта формула допускает простое геометрическое истолкование. Проведем прямые через точки f_0, f_1 и f_1, f_2 (см. рис. 4) до пересечения

$= \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}$, то отсюда уже следует, что и $\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y}$ в среднем квадратичном сходится к нулю (ср. М. И. Вишик и О. А. Ладыженская, Краевые задачи для уравнений в частных производных..., Успехи матем. наук 11, № 6, 1956, стр. 41).

с вертикальными прямыми $x = x_0$ и $x = x_2$; ординаты точек пересечения и будут f_0^* и f_2^* . Следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху дугой параболы $f_0 f_1 f_2$ равна арифметическому среднему площадей трех прямолинейных трапеций, ограниченных отрезками $f_0 f_2$, $f_0 f_2^*$ и $f_0^* f_2^*$. Заставляя точку x_1 стремиться к одной из точек x_0 , x_2 , мы в пределе получим известную архимедову квадратуру параболы.

В численном анализе до сих пор отсутствует достаточно простая и удобная формула для численного интегрирования по неравностоящим значениям аргумента. Приведенный пример показывает, что интегрирование по трем точкам можно свести к двум линейным экстраполяциям и трем квадратурам по формуле трапеций. Было бы крайне интересно исследовать вопрос о возможности обобщения такого метода численного интегрирования на большее количество узлов, т. е. на многочлены произвольных степеней.

А. И. Жуков (Москва)

10. Пусть G — конечное или бесконечное множество, в котором определена операция $a * b = c$, обладающая свойствами

а) $a * a = a$,

б) $(a * b) * (a * c) = a * (b * c)$,

в) уравнения $a * x = b$ и $x * a = b$ разрешимы при любых a и b .

[Пример подобной операции: $a * b = \frac{1}{2}(a + b)$.]

Всегда ли в таком случае имеет место равенство $(b * a) * (c * a) = (b * c) * a$?

А. И. Шишов (Москва)

Исправления

Интеграл в задаче 12 повышенной трудности по высшей математике (вып. 2, стр. 272) должен читаться так:

$$\int_1^{\infty} x^p e^{-x^p} |\sin \pi x|^q dx.$$

Задача 28 средней трудности по элементарной математике (вып. 3, стр. 268) должна читаться так:

«Общие касательные l_1 и l_2 двух окружностей S_1 и S_2 определяют четыре точки касания; в (выпуклый) четырехугольник, полученный соединением этих точек, можно вписать окружность. Доказать, что

а) если касательные внешние, то окружности S_1 и S_2 касаются, т. е. их радиусы r_1 и r_2 связаны с расстоянием d между их центрами соотношением

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + 4r_1 r_2 = d^2;$$

б) если касательные внутренние, то радиусы r_1 и r_2 окружностей S_1 и S_2 связаны с расстоянием d между их центрами соотношением

$$(r_1 + r_2)^2 + 4r_1 r_2 = d^2.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ¹⁾

1. Задачи по элементарной математике

А. Задачи средней трудности

1. Дан равносторонний треугольник ABC . Найти геометрическое место таких точек M плоскости, что отрезки, отсекаемые на прямых MA и MB сторонами треугольников (т. е. отрезки AP и BQ , где P есть точка пересечения MA и BC , а Q — точка пересечения MB и AC) равны.

Первое решение (элементарно-геометрическое). Очевидно, что прямая AB принадлежит искомому геометрическому месту. Выясним, какие точки, не принадлежащие AB , удовлетворяют указанным свойствам.

Рассмотрим треугольники APB и AQB ; введем обозначения: $\angle BAQ = 1$, $\angle ABP = 2$, $\angle AQB = 3$, $\angle APB = 4$ (на рис. 1 изображены два варианта расположения точки M — «сплошной» и «штриховой»). В этих треугольниках $AP = BQ$, $AB = BA$, а также $1 = 2$ или $1 + 2 = 180^\circ$. Отсюда следует, что $3 = 4$ или $3 + 4 = 180^\circ$ (для доказательства достаточно наложить треугольники так, чтобы их стороны AB и BA совпали). Таким образом, представляются возможными 4 случая:

- а) $1 = 2$, $3 = 4$;
- б) $1 = 2$, $3 + 4 = 180^\circ$;
- в) $1 + 2 = 180^\circ$, $3 = 4$;
- г) $1 + 2 = 180^\circ$, $3 + 4 = 180^\circ$.

Случай г) невозможен, так как сумма четырех углов двух треугольников не может равняться 360° .

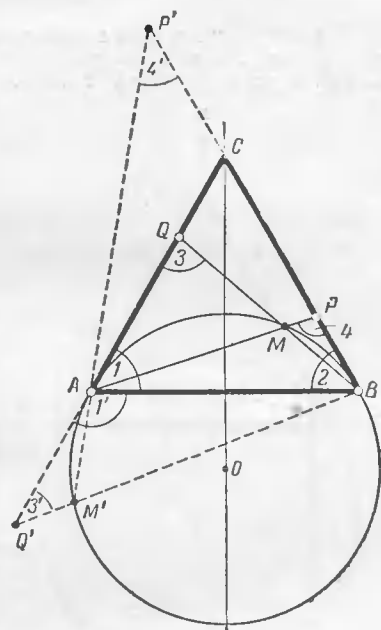


Рис. 1.

¹⁾ Решения задач печатаются по мере их поступления от читателей «Математического просвещения». В настоящем выпуске помещены решения некоторых задач, напечатанных в 1-м выпуске; пропуск номера задачи означает, что ее решение будет помещено в одном из следующих выпусков.

В случае α) $\triangle APB = \triangle AQB$; они расположены симметрично, и точка M лежит на оси симметрии CO треугольника ABC .

В случае β) («сплошной» вариант рис. 1) сложим суммы углов обоих треугольников:

$$(1 + 3 + \angle ABQ) + (2 + 4 + \angle BAP) = 360^\circ.$$

Здесь $1 = 2 = 60^\circ$, $3 + 4 = 180^\circ$, откуда $\angle ABQ + \angle BAP = 60^\circ$, и в $\triangle AMB$ угол M равен 120° ; следовательно, M находится на меньшей дуге окружности S , касающейся AC и BC в точках A и B .

В случае γ) («штриховой» вариант) приравняем суммы углов этих треугольников:

$$1' + 3' + \angle ABQ' = 2' + 4' + \angle BAP'.$$

Здесь $3' = 4'$, $1' = 120^\circ$, $2' = 60^\circ$ (или, наоборот, $1' = 60^\circ$, $2' = 120^\circ$, если точка M' лежит в правой половине чертежа), откуда $\angle BAP' - \angle ABQ' = 60^\circ$ (или $\angle ABQ' - \angle BAP' = 60^\circ$), и в $\triangle AM'B$ угол M' равен 60° ; следовательно, M' находится на большей дуге той же окружности S .

Таким образом, *искомое геометрическое место состоит из двух прямых AB и CD и окружности S .*

Решение (неполное) прислал *У. Давыдов (Гомель)*.

Второе решение (аналитическое). Если положить сторону треугольника равной 2 и выбрать систему прямоугольных координат так, как показано на рис. 2, то координаты точек P и Q найдутся из уравнений прямых AM и BC , соответственно BM и AC . Уравнение искомого геометрического места

$$(AP)^2 - (BQ)^2 = 0$$

по упрощении принимает вид:

$$xy \left(x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y - 1 \right) = 0.$$

Следовательно, геометрическое место *представляет собою*

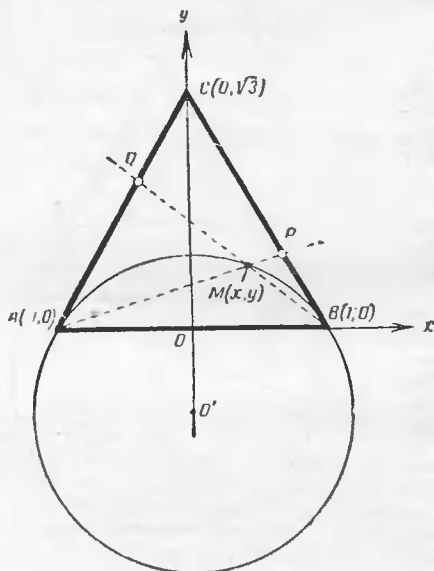


Рис. 2.

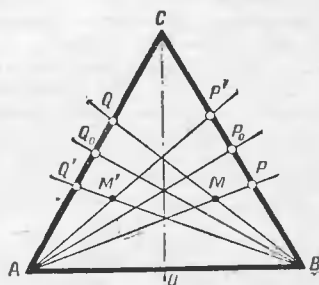


Рис. 3.

кривую 4-го порядка, распадающуюся на две прямые $x=0$, $y=0$ и окружность $x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$.

Третье решение (проективное). Пусть (рис. 3) M — какая-либо точка геометрического места, P и Q — точки пересечения AM и BC — соответ-

венно BM и AC . Обозначим через P_0, Q_0 середины сторон BC и AC , через P' и Q' — точки, симметричные P и Q относительно P_0 , соответственно Q_0 , M' — точка пересечения с AP' и BQ' . Обе точки M и M' принадлежат искомого геометрическому месту.

Каждой паре прямых, выходящих из A и симметричных относительно AP_0 (AP и AP'), соответствует пара прямых, выходящих из точки B (BQ и BQ'); соответствующими парами мы считаем такие, которые пересекаются в точках искомого геометрического места. Эти пары находятся в проективном соответствии. Рассматривая каждую пару прямых как распадающуюся кривую 2-го порядка, заключаем, что искомое геометрическое место точек пересечения есть кривая 4-го порядка, в нашем случае распадающаяся на две прямые и кривую 2-го порядка S (ибо в искомое геометрическое место входят все точки прямых AB и оси симметрии CO). Докажем, что S есть окружность.

Действительно, в пучке A распадающихся кривых 2-го порядка имеются две сдвоенные прямые: AP_0 и перпендикулярная к AP_0 прямая; в пучке B им соответствуют сдвоенные прямые BQ_0 и перпендикулярная к BQ_0 прямая. Пары прямых пучка A делят эти сдвоенные прямые гармонически; поэтому в число пар прямых пучка A входит пара изотропных прямых; в пучке B этой паре соответствует также пара изотропных прямых. Обе последние пары прямых пересекаются в двух мнимых точках, принадлежащих оси симметрии OC , и в обеих циклических точках. Поэтому S содержит обе циклические точки, откуда и следует наше утверждение.

З. А. Скопец (Ярославль)

Используя 2-е и 3-е решения, нетрудно показать, что если треугольник ABC — равнобедренный ($AC=BC$), то соответствующее геометрическое место будет состоять из прямых AB, CO и эллипса. Для произвольного треугольника в соответствующее геометрическое место войдут прямая AB и некоторая кривая 3-го порядка.

2. На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две замкнутые поверхности, одна из которых является сферой, а вторая — поверхностью куба? А как будет обстоять дело, если обе они являются поверхностями куба?

[Было бы интересно дополнительно выяснить, на какое вообще число частей могут делить пространство как-то расположенные сфера и поверхность куба (или поверхности двух кубов).]

1. Сфера и куб могут делить пространство на части четырех типов: I) вне сферы и куба (всегда существует одна такая часть) II) внутри сферы и куба (может существовать 0 или 1 часть), III) вне сферы, но внутри куба (в такую часть должен войти по меньшей мере один трехгранный угол куба — для краткости такую часть будем называть «углом»; число их не превышает числа вершин куба, т. е. 8), IV) вне куба, но внутри сферы [если сфера и куб пересекаются, то в границу такой части должна входить по меньшей мере одна плоская площадка — такую часть назовем «шапкой»; число их не превышает числа граней куба, т. е. 6]. Таким образом, число всех частей не может превышать $1 + 1 + 8 + 6 = 16$. На рис. 4 приведен случай взаимного положения шара и куба, когда число частей, на которые

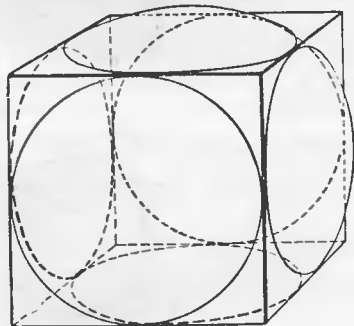


Рис. 4.

обе поверхности разбивают пространство — *максимальное* $\equiv 16$ (шар касается всех ребер куба).

2. На какое вообще число частей могут делить пространство как-то расположенные сфера и поверхность куба? Очевидно, что две части получиться не могут: каждая поверхность в отдельности уже делит пространство на две

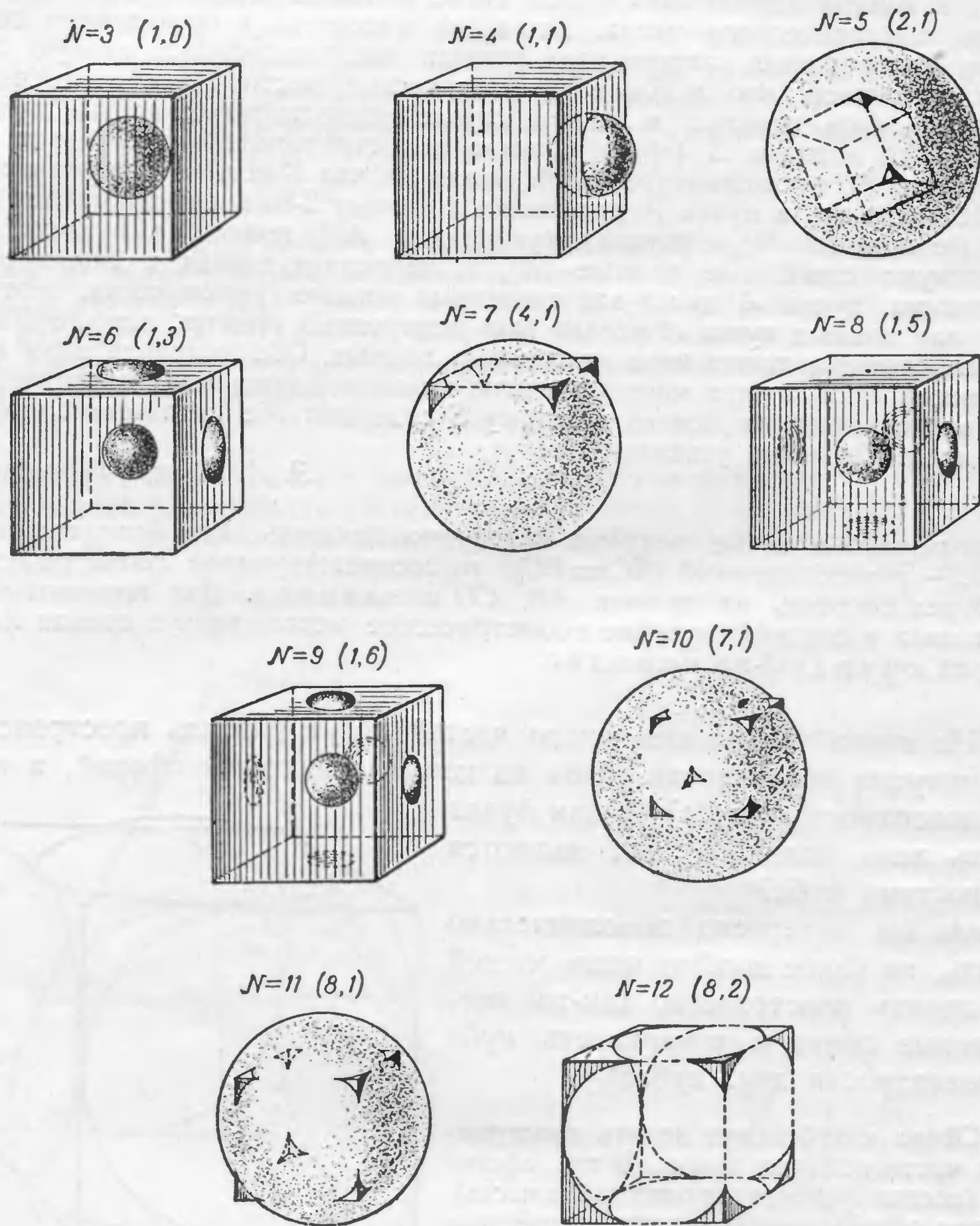


Рис. 5.

части, а поскольку они различные, то вторая поверхность увеличивает число частей по меньшей мере на одну. Поэтому общее число частей заключается между 3 и 16.

На рис. 5 приводятся примеры (не все), когда число частей равно 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (в скобках — число углов U и число шапок S).

3. Докажем, что случаи разбиения пространства на 13, 14 и 15 частей невозможны.

а) Если хоть одна шапка опирается на круг, вписанный в грань, то центр сферы — на оси куба, и при его движении по оси для $(Y, Ш)$ возможны схемы: (1,1), (1,5), (1,6) и (8,6). Общее число частей (N) соответственно равно 4, 8, 9 и 16.

б) Если вписанных кругов два, имеет место случай $N=16$.

в) В случаях разбиения пространства на 13, 14 и 15 частей возможны схемы для $(Y, Ш)$: (8,3), (5,6), (7,4), (6,5), (8,4), (7,5), (6,6), (8,5), (7,6).

г) Оставив пока первые две схемы, заметим, что в остальных случаях $Ш \geq 4$, $Y \geq 6$. Если хотя бы одно ребро куба целиком лежит внутри сферы, то $Ш \leq 3$. Поэтому все 12 ребер куба должны пересекать сферу, касаться или быть вне ее. Возможны такие случаи

Число шапок		6	5	4	
Число ребер	пересекающих сферу	0	1	2	3
	касающихся сферы или лежащих вне ее	12	11	10	9

(число шапок может уменьшиться лишь за счет наличия ребра, пересекающего сферу или лежащего внутри нее).

Число касающихся ребер не может быть более 6. Если их 7, то легко проверить, что хотя бы 3 из них — в одной грани; мы приходим снова к случаю а).

Поэтому вне сферы находится не менее трех ребер, и из 8 возможных углов остается не более 5. Это противоречит условию $Y \geq 6$.

д) Схема (5,6) невозможна, так как при $Ш=6$ все 12 ребер касаются сферы или лежат вне нее; поэтому вне сферы лежат по крайней мере 6 ребер [ср. с п. г)], т. е. $Y < 5$.

При схеме (8,3) все 12 ребер пересекают или касаются сферы; как выше, заключаем, что по меньшей мере 6 из них пересекают ее, т. е. из 6 возможных шапок остается не более 2.

4. Заметим, что аналогичная планиметрическая задача с кругом и квадратом решается много проще. Там возможны все значения N от 3 до 10 ($Y \leq 4$, $Ш \leq 4$). Интересно, что случай $N=10$ определяется неоднозначно, т. е. условиями типа неравенства. В задаче с кубом случай $N=16$ жестко определен условиями типа равенства.

Л. Н. Бескин (Москва)

Аналогичная задача, относящаяся к случаю двух кубов, еще не решена ни одним читателем «Математического просвещения».

5. Проезжая в автобусе мимо кинотеатра, некто успел заметить только часы (но не минуты!) начала четырех сеансов:

1-й сеанс — 12 ч. ... м.

7-й сеанс — 23 ч. ... м.

2-й сеанс — 13 ч. ... м.

8-й сеанс — 24 ч. ... м.

.....

Как по этим данным восстановить начало всех сеансов (предполагается, что продолжительность каждого из восьми сеансов одинакова)?

А. И. Островский (Москва)

Первое решение. Семь сеансов заняли меньше 13 часов (1-й сеанс начался не раньше 12 ч., а 7-й кончился до 1 ч. ночи), а 5 сеансов заняли больше 9 часов (2-й сеанс начался до 14 часов, а 6-й кончился не раньше 23 ч.). Следовательно, длительность сеанса меньше чем 1 ч. 52 мин. и больше

чем 1 ч. 48 мин. Отсюда длительность сеанса равна 1 ч. 50 мин., ибо она выражается всегда числом минут, кратным 5.

Так как первый сеанс кончился до 14 часов, то он мог начаться либо в 12 ч. 00 м., либо в 12 ч. 05 м.; соответственно этому второй сеанс начинается в 13 ч. 50 м. или в 13 ч. 55 м. и т. д.

Если не требовать, чтобы длительность сеанса была кратной пяти минутам, то мы получим не два, а большее число возможных решений задачи.

Аналогичные решения прислали *М. В. Борсук* (Львов), *А. М. Быков* (Баку) и *З. А. Чантурия* (Тбилиси).

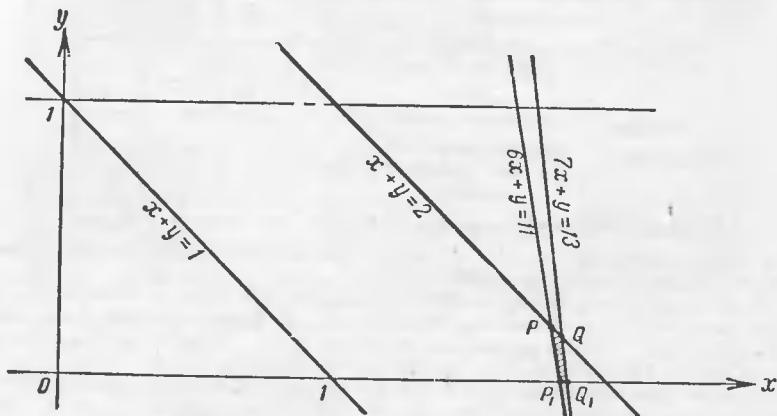


Рис. 6.

Второе решение. Пусть $12+y$ — начало 1-го сеанса, а x — продолжительность сеанса (x и y выражаются в часах). Тогда сеансы начинаются в следующие часы:

1-й в $12+y$ (от 12^{00} до 13^{00});

2-й в $12+y+x$ (от 13^{00} до 14^{00});

7-й в $12+y+6x$ (от 23^{00} до 24^{00});

8-й в $12+y+7x$ (от 24^{00} до 1^{00});

отсюда

$$\begin{aligned} 12 \leq 12+y < 13 & \text{ или } 0 \leq y < 1, \\ 13 \leq 12+x+y < 14 & \text{ или } 1 \leq x+y < 2, \\ 23 \leq 12+6x+y < 24 & \text{ или } 11 \leq 6x+y < 12, \\ 24 \leq 12+7x+y < 25 & \text{ или } 12 \leq 7x+y < 13. \end{aligned}$$

Отбрасывая неравенства, вытекающие из других, получим систему:

$0 \leq y < 1$; $1 \leq x+y < 2$; $11 \leq 6x+y$; $7x+y < 13$, которую нетрудно решить графически (см. рис. 6). Решение (x, y) дает любая точка из заштрихованного четырехугольника PQQ_1P_1 .

Л. Н. Бескин (Москва)

Близкое к этому решение дает автор задачи *А. И. Островский*.

6. Из таблицы

1	2	3	...	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$...	$3n$
(n-1) n+1	(n-1) n+2	(n-1) n+3	...	n^2

выбраны n чисел так, что никакие два из выбранных чисел не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце таблицы. Какова сумма выбранных чисел?

Первую строчку можно переписать так: $0 + 1, 0 + 2, \dots, 0 + n$; последний столбец запишем в виде: $0 + n, n + n, 2n + n, \dots, (n-1)n + n$. Каждое число таблицы представлено теперь в виде суммы двух чисел, причем первое слагаемое одинаково у всех чисел, стоящих в одной строке, а второе — у всех чисел одного столбца. Так как среди выбранных чисел будет по одному слагаемому из каждого столбца и из каждой строки, то сумма всех первых слагаемых выбранных чисел равна

$$0 + n + 2n + \dots + (n-1)n = \frac{n^2(n-1)}{2},$$

а сумма вторых слагаемых

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{n(n^2 - n)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

П. Эрдниев (Ставрополь).

Решение также прислали: Л. Н. Бескин (Москва), Д. Л. Чиареули (Грузинская ССР). Неполное решение получено от А. И. Быкова (Баку) и М. В. Борсука (Львов).

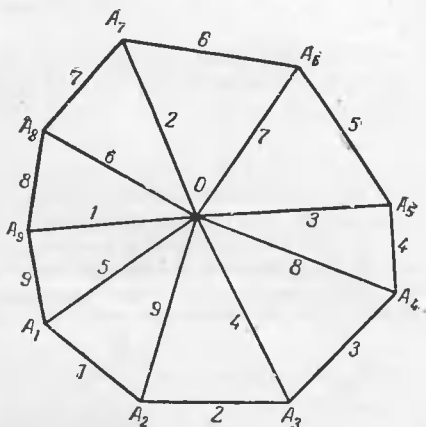


Рис. 7.

7. Расположенная внутри выпуклого n -угольника $A_1 A_2 \dots A_n$ точка O соединена со всеми вершинами; далее, n сторон n -угольника произвольным образом нумеруются числами от 1 до n и независимо от этого n отрезков OA_1, OA_2, \dots, OA_n нумеруются теми же числами, причем никакие две стороны или два отрезка OA_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не получают одинакового номера.

а) при $n = 9$ указать такую нумерацию сторон и отрезков OA_i , при которой сумма номеров сторон любого из треугольников $OA_1 A_2, \dots, OA_2 A_3, \dots, OA_n A_1$ будет одна и та же;

б) доказать, что при $n = 10$ такую нумерацию осуществить нельзя.

Пусть сумма номеров сторон каждого из треугольников $OA_{i-1} A_i$ равна S . Сумма номеров сторон всех n треугольников равна; с другой стороны, эта же сумма равна $3(1 + 2 + \dots + n) = \frac{3}{2}n(n+1)$, так как номер каждой стороны OA_i входит дважды. Таким образом, $nS = \frac{3}{2}n(n+1)$, откуда $S = \frac{3}{2}(n+1)$. Но S — целое число; следовательно, n — число нечетное. Поэтому, например, для $n = 10$ указанная нумерация невозможна; нумерация сторон для $n = 9$ указана на рис. 7.

Л. Н. Бескин (Москва)

Решение также прислали *У. М. Асекритов* (Ярославль), указавший, как провести требуемую нумерацию при любом нечетном n , *М. В. Борсук* (Львов), *А. И. Островский* (Москва) и *П. Эрдниев* (Ставрополь).

8. Из цифр четырехзначного числа N составляются два новые числа M и m — самое большое и самое малое среди чисел, составленных из тех же цифр, что и N ; далее составляется разность $N_1 = M - m$, и с числом N_1 поступают так же, как ранее с числом N . Докажите, что повторив некоторое число раз этот процесс, мы обязательно придем к числу 6174. Каково наименьшее число k такое, что k -кратное повторение описанного процесса обязательно приводит к числу 6174.

К какому результату может привести аналогичный процесс, примененный к трехзначному или к пятизначному числу?

В. С. Новикова (Орехово-Зуево)

Помимо автора задачи, решение (для четырехзначных и трехзначных чисел) прислал *В. А. Голубев* (Кузнецово). Это решение опубликовано им также в журнале «Математика в школе», 1958, № 1, к которому мы отсылаем читателя. *В. С. Новикова* указывает, что подобный процесс, примененный к пятизначному числу, всегда приводит к одному из чисел 53 955, 31 977 или 33 957, а в случае шестизначных чисел мы приходим к числу 431 766 или 442 656.

9. Доказать, что если рациональная функция от x не меняется при замене x на $\frac{1}{x}$, то она является рациональной функцией от $x + \frac{1}{x}$.

Пусть

$$f(x) = \frac{x^k(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n)}{x^l(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m)},$$

где a_0, b_0, a_n, b_m не равны нулю. Используя условие задачи, получаем:

$$\frac{x^{2(l-k)+m-n}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)}{(b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0)} = \frac{a_0x^n + \dots + a_n}{b_0x^m + \dots + b_m}. \quad (1)$$

Степени знаменателей одинаковы; поэтому одинаковы и степени числителей. Следовательно, $m - n = 2(k - l)$; m и n одновременно четны или нечетны. Из соотношения (1) можно заключить, что

$$P_m(x) = b_mx^m + \dots + b_0 = b_0x^m + \dots + b_m$$

и

$$P_n(x) = a_nx^n + \dots + a_0 = a_0x^n + \dots + a_n,$$

откуда $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots; b_0 = b_m, b_1 = b_{m-1}, \dots$. Следовательно, $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — так называемые *возвратные многочлены*, которые представимы в следующем виде¹⁾: если n четно: $n = 2n'$, то $P_{2n'}(x) = x^{n'}\varphi_{n'}(z)$, где

¹⁾ См., например, С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, М., 1951, § 78.

$z = x + \frac{1}{x}$, $\varphi_{n'}(z)$ — многочлен степени n' ; если n нечетно: $n = 2n' + 1$, то $P_{2n'+1}(x) = (x+1)x^{n'}\psi_{n'}(z)$, где $z = x + \frac{1}{x}$, $\psi_{n'}(z)$ — многочлен степени n' .

Далее, возможны два случая:

а) $m = 2m'$ и $n = 2n'$ четны. Тогда

$$f(x) = \frac{x^k x^{n'} \varphi_{n'}(z)}{x^l x^{m'} \psi_{m'}(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} x^{k-l+n'-m'} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)};$$

б) $m = 2m' + 1$ и $n = 2n' + 1$ нечетны. Тогда

$$f(x) = \frac{(x+1)x^{k+n'}\varphi_{n'}(z)}{(x+1)x^{l+m'}\psi_{m'}(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} x^{k-l+n'-m'} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Л. Н. Бескин (Москва)

Близкое решение прислал В. В. Малинин (Ленинград). Неполное решение прислали З. А. Чантурия (Тбилиси) и П. Эрдниев (Ставрополь).

10. Доказать, что если окружности, вписанные в два треугольника, на которые разбивается некоторый четырехугольник одной из своих диагоналей, касаются, то будут касаться и окружности, вписанные в треугольники, на которые разбивается этот же четырехугольник второй диагональю.

В. А. Жаров (Ярославль)

Очевидно, что $AM = AO = AP$; $CN = CO = CQ$ (рис. 8). Так как $BM = BN$, $DP = DQ$, то

$$AB + CD = AD + BC. \quad (1)$$

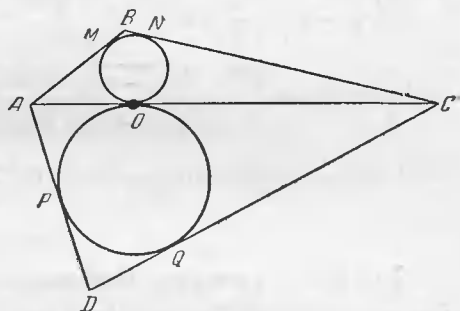


Рис. 8.

Предположим, что окружности, вписанные в треугольники BCD и ABD , касаются диагональ BD в точках X и Y . Используя соотношение (1), получим, что

$$BX + DY = BY + DX. \quad (2)$$

Но равенство (2) возможно только, если точки X и Y совпадают.

У. Давидов (Гомель)

Аналогичное решение прислали Л. Н. Бескин (Москва), который дополнительно указал, что для того, чтобы четырехугольник обладал указанным свойством, необходимо и достаточно, чтобы вокруг него можно было описать окружность, и П. Эрдниев (Ставрополь).

2. Задачи по высшей математике

А. Задачи средней трудности

2. Вычислить ¹⁾

$$a) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}}{\cos 2x} dx, \quad б) I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 1} e^{\frac{x^4 - 4x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}} dx.$$

И. С. Градштейн (Москва)

а) Первое решение. Положим сначала $\sin 2x = u$, а затем

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}} = t. \text{ Имеем}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} u^2}}{1 - u^2} du = \\ &= \int \frac{t^2 dt}{\left(\frac{1}{2} - t^2\right)\left(\frac{1}{2} + t^2\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\frac{1}{2} - t^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\frac{1}{2} + t^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{1 + t\sqrt{2}}{1 - t\sqrt{2}} - \\ &- \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} + \sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} - \sqrt{2} \sin 2x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Отсюда данный интеграл равен $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$.

М. Захаров (Ташкент)

Второе решение. Подстановка $x = \frac{\pi}{2} - t$ приводит к соотношению $I = -I$; отсюда следует, что $I = 0$.

В. И. Розенберг (Ленинград), П. Г. Тихонов (Караганда)

б) $I = 0$; относительно доказательства этого утверждения см. заметку И. С. Градштейна «Об одном достаточном признаке обращения в нуль определенных интегралов» в настоящем выпуске «Математического просвещения» (стр. 189—192).

3. Пусть

$$\xi = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}} \quad (1)$$

— бесконечная периодическая цепная дробь (b_j — натуральные числа)¹⁾ Условие задачи в вып. 1 «Математического просвещения» содержало опечатку.

Рассмотрим предварительно следующие определители:

1) Определитель

$$\Delta_1 = \text{Det} \| b_{ij} \|$$

нечетного порядка m такой, что $b_{ij} = 0$ при четном $i + j$. Этот определитель равен нулю, ибо в любой его член разложения $T = \sum \pm b_{1i_1} \dots b_{mi_m}$ входит хотя бы один элемент $b_{k i_k}$ с четной суммой индексов; в противном случае сумма всех индексов $(1 + i_1) + \dots + (m + i_m)$, равная $2(1 + \dots + m)$, должна была быть нечетным числом.

2) Определитель

$$\Delta_2 = \text{Det} \| c_{ij} \|$$

четного порядка n такой, что $c_{ij} = 0$ при $1 + j$ четном, $c_{\alpha j} = 0$ при $\alpha + j$ нечетном ($\alpha = 2, \dots, m$). Этот определитель равен нулю, ибо если $1 + i_1$ нечетно и $c_{1i_1} \neq 0$, то каждый содержащий $c_{1i_1} \cdot c_{2i_2} \dots c_{ni_n}$ разложения определителя содержит также член $c_{\alpha i_\alpha}$, где сумма $\alpha + i_\alpha$ нечетна; в противном случае сумма $(1 + i_1) + \dots + (n + i_n)$ должна была быть нечетной.

Не нарушая шахматной структуры матрицы A и не меняя по модулю минор в всех элементах, можно переставлять друг с другом четные (нечетные) строки и столбцы; у матриц четного порядка можно, сверх того, одновременно переставлять каждый нечетный столбец (строку) со следующим четным (такие преобразования назовем *допустимыми*).

С помощью допустимых преобразований любой элемент матрицы четного порядка можно передвинуть в левый верхний угол. Если выбранный элемент есть 0, то матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \dots \\ * & 0 & * & \dots \\ 0 & * & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Минор выбранного элемента [элемента a_{11} матрицы (1)] имеет вид Δ_1 . Итак, миноры нулевых элементов шахматной матрицы четного порядка равны нулю. Следовательно, обратная матрица имеет шахматное строение.

Шахматные матрицы нечетного порядка могут быть одного из следующих двух видов:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & \dots \\ 0 & * & 0 & * & \dots \\ * & 0 & * & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \dots \\ * & 0 & * & \dots \\ 0 & * & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Любой нулевой элемент матрицы (2) можно допустимыми преобразованиями перевести на место a_{12} или a_{21} ; миноры этих элементов имеют вид Δ_2 . Аналогично, любой «ненулевой» (т. е. не обязательно равный нулю) элемент матрицы (3) можно допустимыми преобразованиями перевести на место a_{12} или a_{21} ; миноры этих элементов матрицы (3) отличаются от определителя вида Δ_2 лишь перестановкой строк.

Итак, миноры нулевых элементов матрицы (2) равны нулю; миноры «ненулевых» элементов матрицы (3) равны нулю. Отсюда следует, что обратная матрица также имеет шахматное строение.

Из этого доказательства также следует, что если матрица имеет шахматное строение, то и присоединенная матрица A является шахматной; здесь требование неособенности матрицы A уже является излишним.

Л. Н. Бескин (Москва)

Решение автора задачи *Р. А. Миндоса* основано на свойствах клеточных матриц¹⁾. Так, например, ясно, что всякую шахматную матрицу можно перестановкой строк и столбцов привести к виду $\left\| \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right\|$, где A_1 и A_2 — квадратные матрицы; обратная матрица для нее будет иметь вид $\left\| \begin{array}{c|c} A_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A_2^{-1} \end{array} \right\|$, откуда нетрудно усмотреть, что получаемая из последней матрицы перестановкой строк и столбцов матрица A^{-1} также шахматная.

5. Доказать, что если оси двух пересекающихся парабол перпендикулярны, то четыре точки пересечения принадлежат одной окружности.

З. А. Скопец (Ярославль)

Первое решение. Пусть уравнения данных парабол имеют вид

$$y - A(x - a)^2 = 0 \text{ и } x - B(y - b)^2 = 0.$$

Пучок кривых 2-го порядка, проходящих через точки пересечения наших парабол, записывается уравнением

$$y - A(x - a)^2 + \lambda[x - B(y - b)^2] = 0,$$

где λ — параметр. Легко видеть, что при $\lambda = \frac{A}{B}$ кривая пучка является окружностью.

У. Давидов (Гомель)

Второе решение. Пусть точки P_1, P_2, P_3, P_4 пересечения данных парабол $y = A(x - a)^2$ и $x = B(y - b)^2$ отвечают комплексным числам z_1, z_2, z_3, z_4 ($z_j = x_j + iy_j, j = 1, 2, 3, 4$, где (x_j, y_j) — координаты точек пересечения парабол). Так как эти точки неколлинеарны, то для доказательства того, что они лежат на одной окружности, достаточно показать, что их сложное отношение $W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}$ вещественно²⁾.

Уравнения парабол приводят к следующему уравнению четвертого порядка, которому должны удовлетворять абсциссы x_1, x_2, x_3, x_4 точек пересечения парабол:

$$x = B[A(x - a)^2 - b]^2, \quad BA^2x^4 - 4BA^2ax^3 + \dots = 0.$$

Сумма корней этого уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sigma = \frac{4BA^2a}{BA^2} = 4a$.

Покажем, что мнимая часть сложного отношения чисел z_1, z_2, z_3, z_4 равна нулю. Воспользовавшись тем, что $y_i = A(x_i - a)^2$, получим

$$\begin{aligned} W(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \frac{[(x_3 - x_1) + i(y_3 - y_1)][(x_4 - x_2) + i(y_4 - y_2)]}{[(x_4 - x_1) + i(y_4 - y_1)][(x_3 - x_2) + i(y_3 - y_2)]} = \\ &= \frac{(x_3 - x_1) \{1 + i[A(x_3 - x_1) - 2aA]\} (x_4 - x_2) \{1 + i[A(x_4 - x_2) - 2aA]\}}{(x_4 - x_1) \{1 + i[A(x_4 - x_1) - 2aA]\} (x_3 - x_2) \{1 + i[A(x_3 - x_2) - 2aA]\}} = \\ &= W(x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{(\text{вещ}) + i(A\sigma - 4aA)}{(\text{вещ}) + i(A\sigma - 4aA)} = \text{вещественному числу.} \end{aligned}$$

Л. Н. Бескин (Москва)

¹⁾ См. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, М., 1956, гл. 1, § 3.

²⁾ См., например, А. И. Маркушевич, Элементы теории аналитических функций, М., 1944, гл. 1, § 3.

Третье решение. В расширенной (до проективной) евклидовой плоскости две пересекающиеся параболы определяют пучок кривых второго порядка, пересекающих несобственную прямую в парах точек, принадлежащих одной инволюции. Двойными точками этой инволюции являются несобственные точки данных парабол. Обе несобственные точки лежат на перпендикулярных, согласно условию задачи, осях данных парабол, поэтому циклические точки плоскости принадлежат этой инволюции. Следовательно, в пучке кривых второго порядка должна содержаться кривая второго порядка, проходящая через обе циклические точки. Такой кривой является или окружность, или пара прямых, одна из которых является несобственной, или пара изотропных прямых. Но четыре вещественные точки пересечения двух парабол не принадлежат одной прямой или паре изотропных прямых, откуда следует, что четыре точки пересечения обоих парабол принадлежат одной окружности, что и требовалось доказать.

З. А. Скопец (Ярославль)

Эта довольно распространенная задача помещена также в «Элементарной геометрии» Ж. Адамара (ч. II, изд. 1-е, М., 1938, задача 846) и в «Сборнике задач по аналитической геометрии» С. В. Бахвалова и др. (М., 1957, задача 685); там намечены решения, отличные от приведенных выше.

7. Доказать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2\sqrt[2]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{4}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

расходится.

Расходимость устанавливается на основании теоремы сравнения рядов¹⁾ сравнением данного ряда с гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} : \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

В. И. Розенберг (Ленинград)

Решение прислали также У. Давыдов (Гомель), Л. Н. Бескин (Москва), М. С. Крюков (Новокуйбышевск), А. Колесников (Ростов), С. Шушбаев (Ташкент).

9. Доказать, что в n -мерном евклидовом пространстве не существует $n+2$ векторов, образующих попарно тупые углы.

Предположим противное: пусть векторы e_1, e_2, \dots, e_{n+2} попарно образуют тупые углы, т. е. все скалярные произведения $e_i e_j < 0$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n+2$). Обозначим вектор $-e_{n+2}$ через a ; в этом случае

$$e_i a > 0, e_i e_j < 0 \text{ при } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (1)$$

Векторы e_1, e_2, \dots, e_{n+1} линейно зависимы, так как пространство n -мерно:

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0, \quad (2)$$

¹⁾ Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. II, М., 1956, стр. 18.

причем не все $\lambda_i = 0$. Пусть вектор \mathbf{a} имеет координаты $(1, 0, 0, \dots, 0)$; тогда в силу условия (1), первые координаты векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$ будут положительными. Отсюда заключаем, что среди коэффициентов λ_i в равенстве (2) должны быть как положительные, так и отрицательные числа. Обозначив сумму всех членов $\lambda_j \mathbf{e}_j$ с отрицательными λ_j через $-\mathbf{v}$, а сумму членов $\lambda_j \mathbf{e}_j$ с положительными λ_j — через \mathbf{u} , перепишем равенство (2) в виде $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Умножив это соотношение скалярно на \mathbf{u} , получим

$$\mathbf{uu} = \mathbf{vu}. \quad (3)$$

Но в силу соотношения (1) $\mathbf{vu} < 0$; с другой стороны, $\mathbf{uu} \geq 0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

А. Берштейн (Москва)

10. Пусть кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$ (функции x и y имеют непрерывные вторые производные) имеет в точке B радиус кривизны ρ . Обозначим через r радиус окружности, описанной вокруг треугольника, образованного касательными к рассматриваемой кривой в точках A, B и C ; A и C лежат по разные стороны от B .

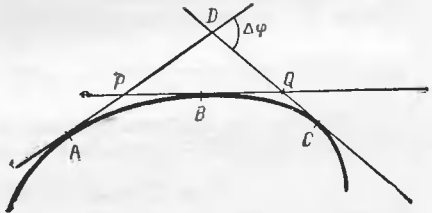


Рис. 9.

Найти предел, к которому стремится величина r , когда A и C стремятся к B .

Обозначим $\sphericalangle AC = \Delta s$, $\sphericalangle AB = \Delta s_1$, $\sphericalangle BC = \Delta s_2$, $PQ = b$ (рис. 9). Радиус окружности, описанной около треугольника PQD , равен

$$r = \frac{b}{2 \sin \angle PDQ} = \frac{b}{2 \sin \Delta \varphi}.$$

С точностью до малых высшего порядка

$$AP = PB = \frac{1}{2} \Delta s_1; \quad QB = QC = \frac{1}{2} \Delta s_2,$$

откуда

$$b = PB + QB = \frac{1}{2} \Delta s \quad \text{и} \quad r \approx \frac{\Delta s}{4 \sin \Delta \varphi}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} r = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{4 \sin \Delta \varphi} = \frac{\rho}{4}.$$

Л. Н. Бескин (Москва)

Заметим, что сделанное в условии задачи предположение о порядке следования точек A, B и C на кривой является излишним.

В. Проблемы

1. В евклидовом пространстве найти все поверхности, обладающие (в малом) следующим свойством: любая хорда образует равные углы с полуноормальными, проведенными в концах хорды по одну сторону от поверхности (пример: сфера).

Автором задачи получено полное ее решение кружным путем как побочный продукт в исследовании, где эта задача являлась деталью. Можно ожидать, что существует более прямое и простое решение, каковое и предлагается найти.

В пространствах гиперболическом (Лобачевского) и эллиптическом для той же задачи найдены частные решения, но вопрос об общем решении остается открытым.

Я. С. Дубнов (Москва)

Обозначим единичные векторы нормалей в концах хорды Δr через m и m_1 . Для любой хорды Δr , по условию, имеем $\cos(m, \Delta r) = \cos(m_1, -\Delta r)$ или $m \cdot \Delta r = -m_1 \Delta r$, откуда

$$(m + m_1) \Delta r = 0. \quad (1)$$

Пусть (поверхность считаем дифференцируемой достаточное число раз)

$$\Delta r = dr + \frac{1}{2} d^2 r + \frac{1}{6} d^3 r + \dots, \quad m_1 = m + dm + \frac{1}{2} d^2 m + \frac{1}{6} d^3 m + \dots$$

С точностью до бесконечно малых 1-го или 2-го порядка равенство (1) является тождеством; с точностью до малых 3-го порядка оно дает

$$\frac{1}{3} m d^3 r + \frac{1}{2} dm d^2 r + \frac{1}{2} dr d^2 m = 0 \quad (2)$$

(здесь использовано то, что

$$m dr = 0 \text{ и } m d^2 r = -dm dr = II, \quad (3)$$

где II — вторая основная форма поверхности). Дифференцируя соотношения (3), получаем

$$d^2 m dr + 2 dm d^2 r + m d^3 r = 0, \quad d^2 m dr + dm d^2 r = -2 dII. \quad (4)$$

Учитывая (4), равенству (2) можно придать вид

$$dII + 2 dm d^2 r = 0. \quad (5)$$

Пусть поверхность отнесена к параметрам u^1, u^2 :

$$\text{Тогда} \quad II = b_{ik} du^i du^k \quad (b_{ik} = -m_i r_k; \quad i, k = 1, 2).$$

$$dII = \partial_l b_{ik} du^i du^k du^l,$$

$$\left. \begin{aligned} dm &= m_i du^i, \quad d^2 r = r_{lk} du^l du^k = (\Gamma_{lk}^\alpha r_\alpha + b_{lk} m) du^l du^k, \\ dm \cdot d^2 r &= m_i (\Gamma_{lk}^\alpha r_\alpha + b_{lk} m) du^i du^l du^k = \\ &= \Gamma_{lk}^\alpha (m_i r_\alpha) du^i du^l du^k = -\Gamma_{lk}^\alpha b_{\alpha i} du^i du^l du^k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(здесь используются дериивационные формулы Гаусса; Γ_{lk}^α — коэффициенты связности, определяемые первой основной формой поверхности). Подставляя (6) в (5), имеем

$$(\partial_l b_{ik} - 2\Gamma_{lk}^\alpha b_{\alpha i}) du^i du^k du^l = (\partial_l b_{ik} - \Gamma_{lk}^\alpha b_{\alpha i} - \Gamma_{lk}^\alpha b_{\alpha i}) du^i du^k du^l = 0,$$

т. е.

$$\Gamma_{lk}^\alpha b_{\alpha i} du^i du^k du^l = 0 \quad (7)$$

при любом векторе смещения du^i .

Так как в силу уравнений Кодацци¹⁾ тензор $\nabla_i b_{ik}$ симметричен по всем индексам, то из (7) вытекает, что

$$\nabla_i b_{ik} = 0. \quad (8)$$

Но ковариантно постоянным тензором b_{ik} обладают только три поверхности — сфера, плоскость и прямой круговой цилиндр²⁾, таким образом, только эти три поверхности удовлетворяют условию задачи.

Л. Н. Бескин (Москва)

Этот же результат был получен В. А. Гаухманом (Москва); для гиперболического и эллиптического пространства вопрос остается нерешенным.

2. Согласно известной теореме Вейерштрасса всякая заданная на отрезке $[0, 1]$ непрерывная функция может быть равномерно приближена многочленами³⁾. Спрашивается, какие заданные на том же отрезке функции могут быть равномерно приближены многочленами с равномерно ограниченными коэффициентами?

Нетрудно видеть, что все такие функции должны быть аналитическими.

С. Б. Стечкин (Москва)

Докажем, что для того чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ могла быть представлена равномерно сходящейся последовательностью многочленов с равномерно ограниченными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1°. $f(x)$ — аналитическая в промежутке $[0, 1]$ и непрерывна в точке $x = 1$;

$$2°. \sup_n \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < +\infty.$$

Необходимость. Пусть

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \text{ равномерно на } [0, 1], \\ P_n(x) &= a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \dots + a_{m_n}^{(n)}x^{m_n}, \quad |a_i^{(n)}| < M. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Выберем из последовательности многочленов $P_n(x)$ подпоследовательность $P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), \dots$ так, чтобы сходилась последовательность свободных членов этих многочленов (это возможно в силу ограниченности $a_0^{(n)}$); затем из этой последовательности выберем подпоследовательность $P_{i_1}^2(x), P_{i_2}^2(x), \dots$ так, чтобы сходились коэффициенты при x , затем — при x^2 и т. д. Наконец, образуем «диагональную» последовательность

$$P_{j_1}(x) = P_{i_1}^1(x), P_{j_2}(x) = P_{i_2}^2(x), P_{j_3}(x) = P_{i_3}^3(x), \dots \quad (2)$$

Так как (2) есть подпоследовательность последовательности (1), то она равномерно сходится к $f(x)$.

¹⁾ См., например, В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, т. II, М.—Л., 1948, стр. 11—12.

²⁾ См. там же, стр. 46.

³⁾ См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс математического анализа, т. III, М.—Л., 1949, стр. 700.

Из построения последовательности (2) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_m^{(j_n)} = a_m, \quad |a_m| \leq M. \quad (3)$$

Неравенство (3) указывает, что радиус сходимости степенного ряда $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq 1$$

и, следовательно, на $[0, 1]$ сумма его представляет собой непрерывную функцию; нетрудно показать, что для любого x из этого промежутка $f(x) = \sum_0^\infty a_i x^i$.

Таким образом, функция $f(x)$ на промежутке $[0, 1]$ разлагается в степенной ряд, который необходимо является ее рядом Маклорена; из ограниченности коэффициентов этого ряда вытекает наше условие 2° .

Аналитичность функции

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad |a_i| \leq M$$

в каждой точке промежутка $[0, 1]$ очевидна [отметим, что все производные $f(x)$ представляют собой ряды, мажорируемые рядами, полученными дифференцированием ряда $M + Mx + Mx^2 + \dots \left(= \frac{M}{1-x} \right)$].

Достаточность. Пусть выполнены условия 1° и 2° . При этом функция $f(x)$ в окрестности нуля разлагается в степенной ряд с ограниченными (в силу 2°) коэффициентами, радиус сходимости которого $R \geq 1$; поэтому аналитическая функция $f(x)$ представляется в виде суммы ряда $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ на всем промежутке $[0, 1]$. Выберем теперь произвольное ϵ и найдем такое $\delta < 1$, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$ (условие равномерной непрерывности функции, непрерывной на $[0, 1]$).

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha x) = a_0 + (a_1\alpha)x + (a_2\alpha^2)x^2 + \dots,$$

где $\alpha = 1 - \delta$; радиус сходимости этого ряда больше 1 и, следовательно, он сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Коэффициенты этого ряда меньше M ; в то же время можно подобрать такой отрезок этого ряда (многочлен!), который отличается на $[0, 1]$ от $f(\alpha x)$ меньше, чем на ϵ и от $f(x)$ — меньше, чем на 2ϵ . Устремляя ϵ к нулю, мы построим последовательность многочленов с равномерно ограниченными коэффициентами, равномерно сходящуюся к $f(x)$.

В. Л. Арлазаров (Москва)

В. П. Хавин (Ленинград), который, используя элементы теории функций комплексного переменного, дал, пожалуй, даже более простое доказательство той же теоремы, указывает, что в случае промежутка, отличного от $[0, 1]$, решение может быть другим. А именно, используя одну теорему С. Н. Мергеляна, можно доказать, что при $1 < a < b$ любая функция, непрерывная в $[a, b]$, может быть равномерно в $[a, b]$ приближена многочленами с равномерно ограниченными коэффициентами.

VI. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОБ УЧЕБНИКАХ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ ГЕРМАНСКОЙ ДЕМОКРАТИЧЕСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

В. Г. Ашкинуге

(г. Шахты)

Целью настоящей статьи является ознакомить советского читателя с содержанием и основными методическими особенностями учебников по математике для средних школ «Grundschule» (6—8 классы) и «Oberschule» (9—12 классы) Германской Демократической Республики¹): *Lehrbuch der Mathematik für die Grundschule* [для 6-го класса (в двух частях) 56 + 74 стр., для 7 кл. — 156 стр., для 8 кл. — 184 стр.; редакторы: G. Beyrodt, E. Weis, J. Riedel, K. Kresse; Berlin, 1955] и *Lehrbuch der Mathematik für die Oberschule* [для 9 кл. — 214 стр., для 10 кл. — 151 стр., для 11 кл. — 214 стр., для 12 кл. — 153 стр.; редакторы: R. Acklow, D. Kind, J. Riedel; Berlin, 1955].

1. Несмотря на то, что эти учебники не лишены весьма существенных недостатков, в том числе и принципиальных, в них реализованы некоторые методические принципы, неоднократно провозглашавшиеся в нашей отечественной методике, но до сих пор не осуществленные полностью в советской школе. Поэтому знакомство с этими учебниками представляется полезным для всех, кто так или иначе связан с преподаванием математики в советской средней школе.

Каждый из рассматриваемых учебников предназначен для определенного класса и включает материал из различных математических дисциплин, подлежащий изучению в этом классе. Наряду с теоретическим материалом, каждый учебник содержит также необходимый комплекс упражнений, являясь, таким образом, одновременно и задачником.

Мы остановимся на содержании рассматриваемых учебников по отдельным математическим дисциплинам²).

¹) Структура средней школы ГДР уже была освещена на страницах «Математического просвещения» — см. статью Л. Н. Миловой «О преподавании элементов высшей математики в средних школах ГДР и Франции». Математическое просвещение, вып. 3, стр. 213—220.

²) Мы придерживаемся того деления курса математики на предметы, которое принято в советской школе.

1. Арифметика

2. Арифметика содержится в учебниках 6 и 7 классов. Кроме того, в учебнике 8 класса имеется тема, содержащая повторительные упражнения по арифметике.

Курс арифметики 6 и 7 классов является непосредственным продолжением курса арифметики 1—5 классов, где рассматривались действия с целыми числами, а также вводились понятия об обыкновенных и десятичных дробях.

В шестом классе арифметика начинается с вопросов *делимости целых чисел*; здесь излагаются основные признаки делимости и способы отыскания наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Затем следуют *действия над обыкновенными и десятичными дробями*. В седьмом классе повторяются действия над целыми числами и дробями, а затем вводятся проценты и подробно рассматриваются различные связанные с ним коммерческие расчеты. Отметим, что процентные расчеты, объединенные в одну тему под названием «*Вычисления в повседневной жизни*» («Die Rechenarten im täglichen Leben»), занимают по объему в учебнике примерно такое же место, как все действия с обыкновенными и десятичными дробями (44 страницы).

3. Отметим некоторые особенности, бросающиеся в глаза при сравнении арифметических глав рассматриваемых немецких учебников с нашими учебниками и задачками по арифметике.

1) В немецких учебниках *отсутствуют пространные выводы правил*. Например, при изложении умножения на дробь даются краткие пояснения, вскрывающие смысл этого действия, всё сказанное иллюстрируется чертежом (произведение рассматривается как площадь или объем), а затем формулируется алгоритм выполнения действия и предлагается ряд упражнений.

2) В числе упражнений на действия с целыми числами и дробями *отсутствуют громоздкие комбинированные примеры с большим числом действий* (исключение составляют примеры на сложение и вычитание целых чисел и десятичных дробей, среди которых имеются довольно длинные). Подавляющее большинство примеров — в одно действие, но имеется (главным образом, в повторительной теме 8 класса) некоторое число примеров в два и три действия. При этом обыкновенные дроби с громоздкими знаменателями в примерах вовсе не встречаются. Пример вроде следующего —

$$\left\{ \left[\left(\frac{1}{2498} + \frac{121}{3747} + \frac{4}{6245} \right) \cdot 4 \frac{52}{77} \cdot \frac{8}{55} \right] \cdot 6 \frac{9}{16} + \frac{9}{18} \right\} : 5 \frac{4}{9}^1$$

был бы в таком учебнике просто немислим.

¹⁾ С. А. Пономарев и Н. И. Сырнев, Сборник задач и упражнений по арифметике, пример № 497 (3).

3) Наконец, *исключительно скромное место в курсе арифметики отведено текстовым задачам*. В разделе «Действия с обыкновенными и десятичными дробями» содержится всего 67 таких задач¹⁾. При этом предлагаемые задачи в подавляющем большинстве крайне просты. Вот, например, одна из наиболее сложных задач:

«С пяти сливовых деревьев собрали 247 кг слив. Из 150 кг сварили повидло, причем вес повидла составляет $\frac{3}{10}$ веса слив. Оставшиеся сливы высушили; при этом они потеряли $\frac{5}{8}$ своего веса. Сколько кг получено повидла и сколько кг сухих слив?»

Так называемые « типовые задачи » в курсе арифметики вовсе не рассматриваются.

II. Алгебра

4. Началом курса алгебры можно считать введение *буквенной символики*, которое происходит в седьмом классе. Вслед за введением буквенных обозначений рассматриваются простейшие *действия над буквенными выражениями*: приведение подобных членов (пока с естественными ограничениями, вытекающими из отсутствия отрицательных чисел), умножение и деление одночленов, умножение и деление многочлена на одночлен. После этого изучаются *линейные уравнения с одним неизвестным*, а затем вводятся *отрицательные числа* и рассматриваются правила действия над относительными числами.

В восьмом классе алгебраические главы начинаются с *умножения многочленов* (здесь же вводятся и основные формулы умножения); далее идет разложение многочленов на множители и действия с алгебраическими дробями, а затем рассматриваются пропорции. После этого вводится понятие *функциональной зависимости* и ее *графического изображения* и рассматривается *линейная функция*. В заключение алгебраического раздела учебника 8 класса рассматриваются *линейные уравнения с двумя неизвестными*.

Отметим еще, что темы алгебраического содержания входят также в геометрическую часть учебника 8 класса. Это тема «*Квадраты и квадратные корни*», в которой значительную часть содержания составляет ознакомление со способами работы по таблице квадратов, а также тема «*Счетная линейка*», где излагаются (конечно, без теоретического обоснования) приемы вычислений на логарифмической линейке — умножение, деление, решение пропорций, возведение в квадрат и извлечение квадратного корня.

В девятом классе несколько более подробно рассматривается понятие *функции*, после чего изучаются *квадратная функция* и в связи с ней квадратные уравнения, *степенная функция* (сначала

¹⁾ Укажем для сравнения, что в задачнике С. А. Пономарева и Н. И. Сырнева на соответствующий материал имеется, по самым скромным подсчетам, свыше 300 текстовых задач.

с натуральным, а затем с любым рациональным показателем) и, в связи с ней, действия над радикалами и некоторые алгебраические функции (определяющие окружность и равностороннюю гиперболу). После этого рассматриваются *показательная и логарифмическая функции*, описывается устройство и употребление логарифмических таблиц и логарифмической линейки.

В заключение в 9 классе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с практикой вычислений: даются *первоначальные сведения о приближенных вычислениях* (вводятся понятия абсолютной и относительной ошибки и на нескольких примерах показывается оценка погрешности при действии с приближенными числами), указываются некоторые приемы табулирования функций (включая линейную интерполяцию, которая встречается еще раньше, в связи с таблицей квадратов), сообщается так называемое «правило Утрехта» умножения и деления приближенных чисел. Здесь же указывается на применение в технике вычислительных машин и приводятся фотографии арифмометров (обыкновенного и электрического). Отметим попутно, что более подробному изучению действий над приближенными числами посвящена специальная тема в 12 классе.

В десятом классе алгебраический материал представлен лишь темой «*Числовые последовательности*». Здесь изучается арифметическая прогрессия и вкратце рассматриваются арифметические ряды высших порядков. Затем рассматривается геометрическая прогрессия (конечная и бесконечная). В качестве применения бесконечной геометрической прогрессии подробно излагаются коммерческие вопросы, связанные со сложными процентами.

В одиннадцатом классе, посвященном в основном математическому анализу, собственно алгебраического материала нет. Здесь имеется лишь стоящая особняком тема «*Комбинаторика*», в которой рассматриваются перестановки, размещения и сочетания (без повторений и с повторениями), а также формула бинома Ньютона.

Наконец, в двенадцатом классе алгебраический материал представлен темой «*Комплексные числа*», которая начинается обзором расширения понятия числа. Здесь напоминаются основные законы действий над натуральными числами и на основе явно формулируемого принципа перманентности этих законов кратко, но достаточно корректно намечается путь введения сначала дробных, затем отрицательных и, наконец, иррациональных чисел. После этого вводятся комплексные числа, изучаются действия над ними (включая формулу Муавра для целых и дробных показателей) и рассматриваются некоторые физические (механические и электротехнические) приложения.

Б. Остановимся на некоторых особенностях курса алгебры в рассматриваемых учебниках.

1) Прежде всего необходимо отметить больший, чем в нашем курсе алгебры, *удельный вес функционального материала*. В стар-

ших классах (9—10) идея функциональной зависимости является центральной, и вокруг нее группируются вопросы различного содержания (квадратные и другие уравнения, логарифмы, прогрессии). Такое построение курса алгебры придает ему стройность, целеустремленность. Однако в этом отношении можно было бы, по нашему мнению, пойти и дальше, особенно в младших (7—8) классах. Так, изучение пропорций в рассматриваемых учебниках отрывается от изучения функции $y=kx$, т. е. прямой пропорциональной зависимости; обратная пропорциональная зависимость вовсе не рассматривается, если не считать беголого упоминания о ней в числе других функций вида $y=x^{-n}$ в 9 классе.

2) *Упражнения с функциональным содержанием* имеются, начиная с первых же шагов изучения алгебры. Эти упражнения часто имеют целью выявить эмпирически какую-либо закономерность, которая затем обосновывается. В ряде случаев они сопровождаются практическими указаниями о наиболее целесообразном порядке их выполнения, выборе масштаба, форме таблиц и т. п. Отметим, что обилие функциональных упражнений на всем протяжении курса алгебры должно, по нашему мнению, обеспечивать прочное закрепление вычислительных навыков, приобретаемых еще в курсе арифметики. Эта сторона дела, несомненно, должна представлять интерес для советской школы.

3) *Тождественные преобразования* занимают в рассматриваемых учебниках более скромное место, особенно теоретическая сторона этого вопроса. Собственно, «теории» тождественных преобразований в немецких учебниках почти нет. Ряд правил тождественных преобразований формулируются как уже известные законы арифметических действий, например правило умножения многочлена на одночлен: «Чтобы умножить сумму или разность на некоторое число, нужно умножить на это число каждый член и полученные результаты сложить или вычесть». Некоторые же правила, обычные в наших курсах алгебры, в рассматриваемых учебниках вовсе не встречаются, например правило приведения подобных членов или умножения одночленов, хотя соответствующие упражнения имеются; учащиеся должны выполнять эти упражнения, по-видимому, опираясь непосредственно на смысл написанного выражения (или, если угодно, на законы арифметических действий).

Об упражнениях в тождественных преобразованиях можно сказать то же, что было сказано об арифметических примерах: они в большинстве представляют собой примеры в одно действие и по содержанию своему значительно проще, чем встречающиеся в наших задачниках; последнее в особенности относится к тождественным преобразованиям иррациональностей.

4) Рассмотрение *уравнений*, как уже указывалось, ведется параллельно с изучением соответствующих функций. Это дает возможность не только рассматривать постоянно графическое решение уравнений

наряду с аналитическим, но и иллюстрировать геометрически все теоретические положения, связанные с уравнениями. Укажем в качестве примера, как иллюстрируется формула корней квадратного уравнения (рис. 1).

5) Отметим, что при рассмотрении уравнений нигде не используется понятие равносильности. В связи с этим во всех примерах производится проверка получаемых решений. Характерно также, что в рассматриваемых учебниках игнорируются различные вырожденные и особые случаи. Так, в учебнике 8 класса в связи с вопросом о линейных уравнениях с двумя неизвестными имеется следующая формулировка:

«Для однозначного определения двух неизвестных x и y необходимы два уравнения, которые не противоречили бы друг другу и были бы независимы друг от друга».

Однако никаких пояснений относительно последних оговорок не дается ни здесь, ни в дальнейшем.

Точно так же нигде не рассматривается и вопрос о возможности появления посторонних корней при решении уравнений. Правда, при рассмотрении иррациональных уравнений упражнения построены таким образом, что наряду с каждым уравнением предлагаются также все со-

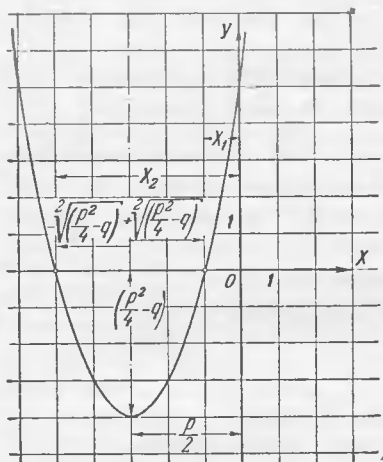


Рис. 1.

пряженные с ним (т. е. отличающиеся от него знаками перед квадратными радикалами), что дает учителю повод в процессе классного преподавания затронуть вопрос о посторонних корнях. Однако отсутствие каких-либо указаний на этот счет в учебнике говорит о том, что никакого специального акцентирования этого вопроса во всяком случае не предполагается.

6) На всем протяжении курса до 12 класса не оттеняется различие между рациональными и иррациональными числами. О существовании иррациональных чисел упоминается вскользь в связи с извлечением корня, причем точного определения иррациональных чисел и здесь не дается. Однако вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием, связанные с необходимостью всё время оперировать с десятичными приближениями чисел (безразлично — рациональных или иррациональных), а также изучение основ математического анализа с постоянно употребляемой операцией предельного перехода — не могут не способствовать выработке у учащихся правильного представления о совокупности действительных чи-

сел. Лишь в выпускном, 12 классе в общем обзоре развития понятия числа указывается, какие операции вообще приводят к иррациональным числам, дается определение иррациональных чисел и указывается (геометрически) на непрерывность множества действительных чисел.

III. Геометрия

6. Курс геометрии начинается в шестом классе темой «*Осевая симметрия*», в которой вводится понятие осевой симметрии как точечного преобразования плоскости, осуществляемого перегибанием этой плоскости по некоторой прямой. Здесь уже устанавливаются основные свойства симметричных точек и прямых и на этой основе излагаются основные приемы построений циркулем и линейкой (деление пополам данного отрезка и данного угла, проведение перпендикуляра к данной прямой).

Далее следует тема «*Тела и плоские фигуры*», в которой рассматриваются призма (прямая), цилиндр, круг и эллипс, пирамида, конус, треугольник, усеченный конус, усеченная пирамида, трапеция и шар. Все эти тела и фигуры рассматриваются в том порядке, в каком они перечислены здесь. При этом никакой теории рассматриваемых тел и фигур здесь не излагается. Так, например, для каждого из рассматриваемых пространственных тел вводится определение, приводятся примеры предметов, имеющих соответствующую геометрическую форму (эти примеры сопровождаются большим числом фотографий и рисунков), после чего предлагаются довольно простые упражнения: подсчитать число ребер, вершин и граней (в случае многогранника), построить развертку тела, получить на модели те или иные сечения и т. п. Исключение составляет лишь вопрос о сумме углов треугольника, который излагается с доказательством, и утверждение, что всякое плоское сечение шара есть круг (которое предлагается проверить эмпирически).

В седьмом классе изучение геометрии также начинается с темы «*Симметрия*», в которой материал первой темы 6 класса повторяется и несколько расширяется: рассматриваются свойства равнобедренного треугольника, а также указываются простейшие геометрические места точек. Далее следует тема, посвященная *зависимости между различными углами* («*Winkelleziehungen an Geraden*»). Здесь рассматриваются смежные и вертикальные углы, способы измерения углов на местности, а также основы теории параллельных.

Отметим, что вся «теория параллельных» занимает в учебнике, вместе с пятью имеющимися здесь чертежами, примерно полторы страницы. Параллельные прямые определяются здесь как прямые, пересекающие некоторую прямую под равными углами. После этого указывается (без каких-либо пояснений), что параллельные прямые могут быть совмещены переносом вдоль некоторой прямой, и утверждается без доказательства, что «1) параллельные прямые всюду одинаково

удалены друг от друга» и «2) через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой». Затем вводятся определения соответственных и накрест лежащих углов и формулируются утверждения о равенстве этих углов, а также обратные предложения. В качестве обоснования первых утверждений указывается кратко, что при совмещении параллельных прямых с помощью параллельного переноса соответственные углы совпадут, а накрест лежащие станут вертикальными; обратные утверждения никак не обосновываются.

Следующая тема — «*Треугольник*» — начинается с повторного изложения теоремы о сумме углов треугольника. Далее следуют признаки равенства, которые устанавливаются в результате рассмотрения соответствующих задач на построение. Далее доказываются теоремы о пересечении биссектрис, высот и перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через их середины; без доказательства формулируется также теорема о пересечении медиан (доказательство ее содержится в упражнениях к последующим темам).

Заключительная тема 7 класса посвящена *четыреугольникам*. Здесь рассматриваются параллелограмм и его частные виды, трапеция, дельтоид. В связи со средней линией трапеции рассматривается также задача деления отрезка на равные части.

В восьмом классе курс геометрии начинается главой, посвященной *площадям многоугольников*. При этом не делается никаких попыток определить понятие площади: предлагается лишь в качестве упражнения подсчитывать число единичных квадратов в прямоугольнике, длины сторон которого выражаются целыми числами, а также показывается приближенный подсчет площади фигуры, начерченной на клетчатой бумаге. Формула площади треугольника сообщается без доказательства,

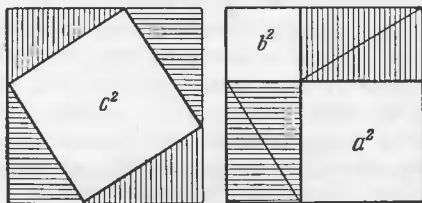


Рис. 2.

после чего обычным путем выводятся формулы площадей параллелограмма, треугольника и трапеции. Затем известным «индийским» способом (рис. 2) выводится теорема Пифагора.

Следующая геометрическая тема относится к теории *окружности*. Здесь рассматриваются свойства хорд и касательных, а затем центральные и вписанные углы. После этого дается способ преобразования прямоугольника в равновеликий квадрат, с помощью которого устанавливаются свойства катета и высоты прямоугольного треугольника. В заключение этой темы эмпирически устанавливаются формулы длины окружности и площади круга.

Далее следует глава, в которой рассматриваются *объемы и поверхности пространственных тел*, а также некоторые способы *изобра-*

жения тел на плоскости. Вначале сообщаются формулы объема и поверхности прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы и цилиндра. Затем, после рассмотрения трех равных четырехугольных пирамид, получающихся в результате разрезания куба, дается формула объема пирамиды и, по аналогии с ней, формула объема конуса. Выражение боковой поверхности конуса получается в результате рассмотрения его развертки (рис. 3). Далее вводятся формулы объема и поверхности шара. Для вывода объема шара предлагается опытным

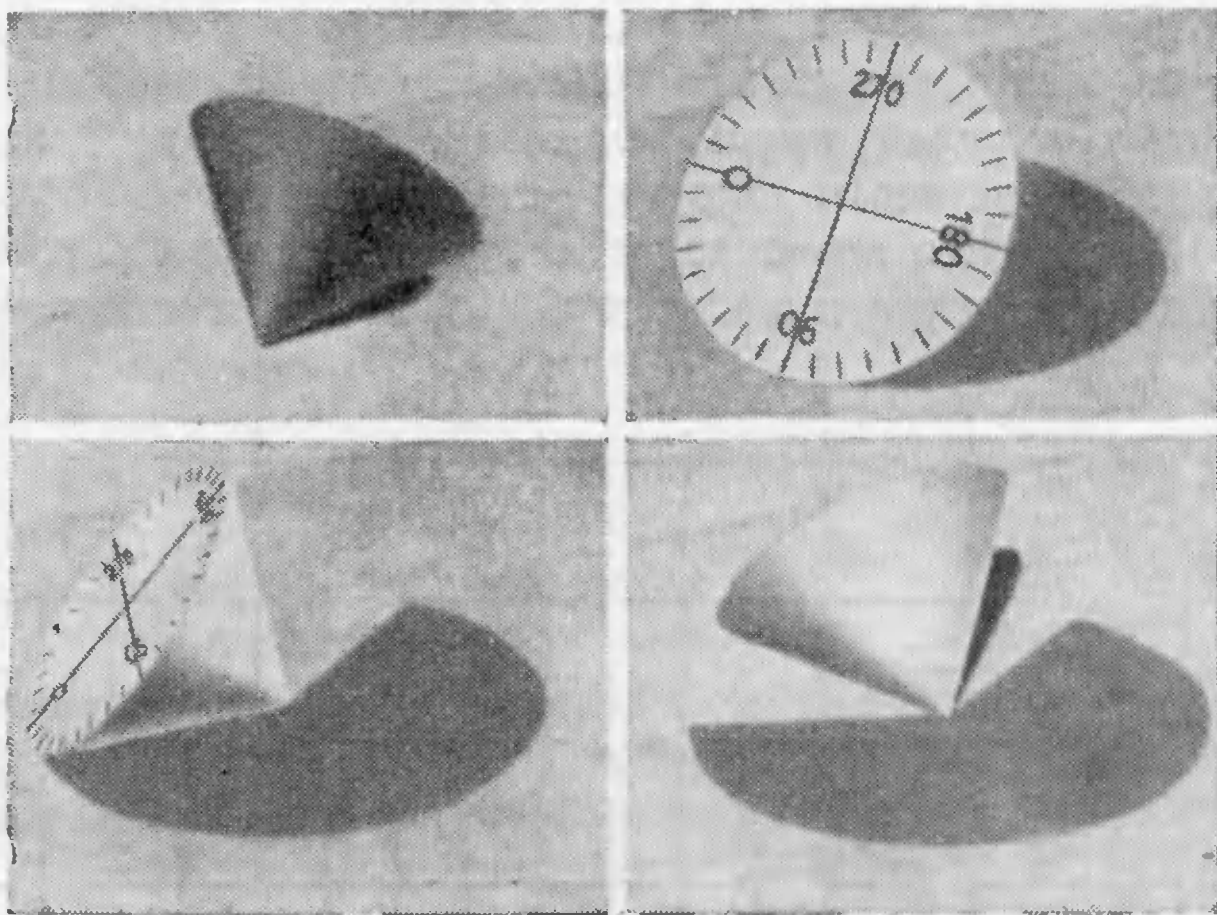


Рис. 3.

путем проверить, что объем полушара равен разности объемов цилиндра и конуса, имеющих одинаковые с полушаром диаметры и высоты. Поверхность шара вычисляется путем вписывания в шар большого числа пирамид (с вершинами в центре шара) и сравнения суммы объемов этих пирамид с объемом шара. В заключение этой темы излагаются методы изображения тел в одной параллельной проекции и двух ортогональных проекциях.

Курс геометрии 8 класса заканчивается небольшой темой «Из теории подобия» («Aus der Ähnlichkeitslehre»), в которой вводится определение отношения отрезков как отношения длин (с кратким упоминанием о разнице между случаями соизмеримых и несоизмеримых отрезков), доказываются две теоремы о пропорциональных отрезках, после чего дается определение подобия для многоугольников и устанавливается один признак подобия для треугольников (по двум углам).

В девятом классе первой из геометрических тем является тема «Подобие», которая начинается с повторения материала, изложенного в соответствующей теме 8 класса. Затем рассматриваются признаки подобия треугольников и некоторые свойства подобных много-

угольников, а также дается понятие о подобном расположении фигур на плоскости и в пространстве. Далее даются понятия *геометрического преобразования* и *группы преобразований* и рассматриваются группы движений и подобных преобразований. В заключение этой темы излагаются некоторые теоремы, связанные со средними пропорциональными величинами, и задача о «золотом сечении» отрезка.

В следующей теме рассматриваются *правильные многоугольники* (указываются способы построения правильных m -угольников для $m=2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, $15 \cdot 2^n$), а также площадь круга и длина окружности. Для вычисления площади круга делается замечание о том, что окружности всегда можно рассматривать как подобные фигуры; отсюда выводится, что выражение площади круга должно иметь вид πr^2 , и аппроксимацией площади четверти круга ступенчатыми многоугольниками (см. рис. 4) находится значение π с тремя верными значащими цифрами. Из площади круга выводится и выражение длины окружности.

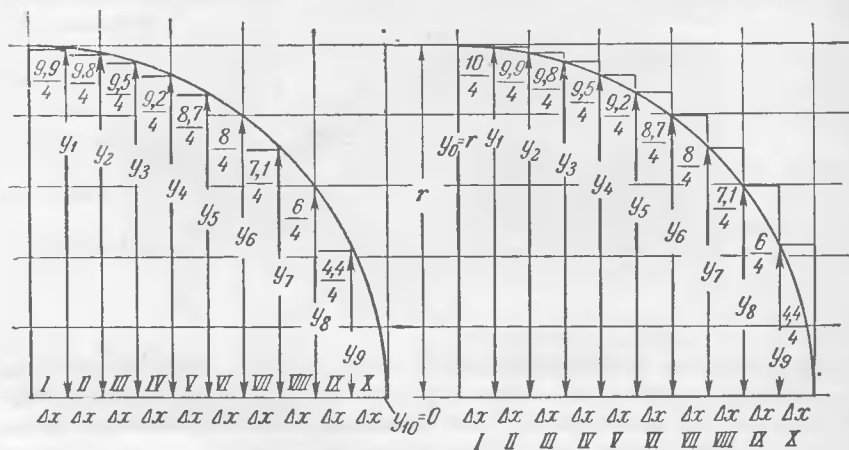


Рис. 4.

Заключительная тема курса геометрии 9 класса носит название «*Геометрия положения*». В ней рассматривается понятие гармонизма (причем дается понятие о несобственной точке данной прямой) и устанавливаются гармонические свойства полного четырехвершинника и четырехсторонника. Указывается также на наличие двойственности между этими свойствами, хотя вообще принцип двойственности не формулируется.

В десятом классе геометрический материал представлен большой темой «*Изображение тел. Вычисление объемов и поверхностей*». В первой части этой темы рассматривается построение изображений в двух ортогональных проекциях, а также изображение тел в некоторых аксонометрических проекциях (изометрия, диметрия). Вторая часть

темы начинается с изложения принципа Кавальери; сначала даются некоторые пояснения для случая площадей плоских фигур (см. рис. 5), а затем принцип формулируется для объемов тел. Затем с помощью этого принципа выводятся объемы всех рассматривавшихся ранее тел. Поверхности же круглых тел находятся примерно так же, как и в предыдущих классах.

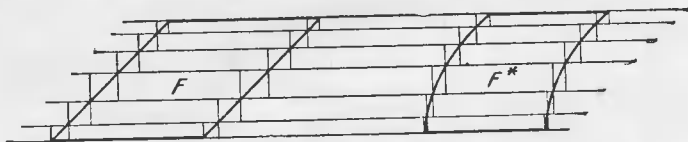


Рис. 5.

Наконец, в одиннадцатом классе геометрический материал представлен лишь темой «Аналитическая геометрия плоскости»; содержание этой темы изложено в упоминавшейся выше статье Л. Миловановой; поэтому мы не будем на нем останавливаться.

7. Остановимся на некоторых особенностях курса геометрии, содержащегося в рассматриваемых учебниках.

1) Материал курса геометрии расположен достаточно резко очерченными *концентрами*, что связано с общей структурой немецкой средней школы: материал 7—8 классов (Grundschule) дает более или менее законченный курс сведений, необходимый для простейших практических применений, а в следующих классах (Oberschule) этот материал частично повторяется. Кроме того, материал 6 класса образует некоторый «нулевой концентр», наличие которого вызвано, по-видимому, чисто методическими соображениями.

2) *Логическая строгость изложения курса усиливается с чрезвычайной постепенностью.* На первых порах большинство геометрических фактов сообщается без доказательства, многие факты устанавливаются эмпирически. В дальнейшем роль геометрических доказательств повышается. Однако на всем протяжении курса логической обработке подвергаются лишь те вопросы, для которых необходимость в такой обработке может быть непосредственно ясна учащимся. Так, например, в рассматриваемых учебниках вовсе не рассматриваются вопросы о точном смысле понятий длины, площади и объема. Эти вопросы, как известно, представляют трудности для учащихся, но в то же время эти вопросы (именно научная их постановка) существенны с точки зрения общеобразовательных целей обучения геометрии.

3) Как в отборе материала, так и в характере изложения, а также в подборе упражнений проявляется стремление выявить *практические применения* изучаемого материала. При всякой возможности указываются разнообразные практические ситуации, в которых реализуются те или иные геометрические положения; большое внимание уделяется

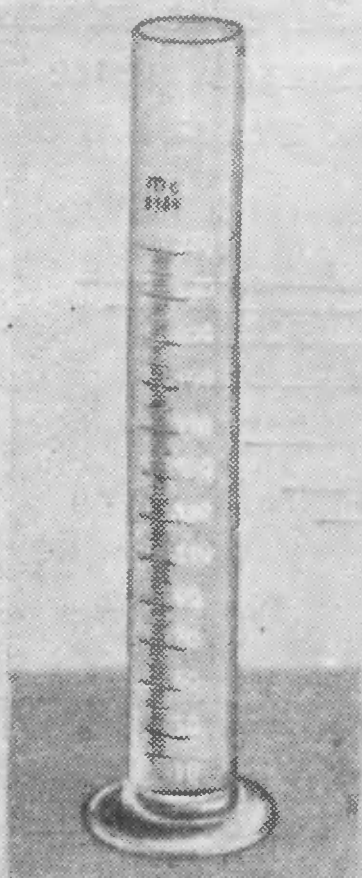


Abb. 50

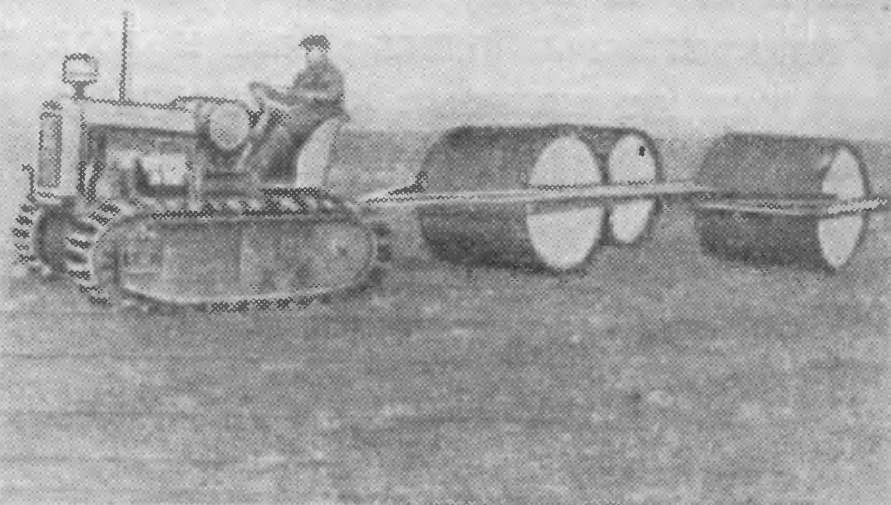


Abb. 51

Wenn man das Modell eines geraden Kreiszylinders mit einer Kreisfläche auf den Tisch stellt, kann man überall ein rechtwinkliges Zeichendreieck so anlegen, wie es die Abbildung 54 zeigt. Die gekrümmte Fläche steht also überall auf der Grundfläche senkrecht. Ein gerader Kreiszylinder wird von zwei gleichgroßen, zueinander parallelen Kreisflächen (Grund- und Deckfläche) und von einer gekrümmten Fläche, dem Mantel, begrenzt. Die Abbildung 55 zeigt, wie man den Mantel eines geraden Kreiszylinders auf der Zeichenebene abrollen kann. Man erhält so ein Rechteck.

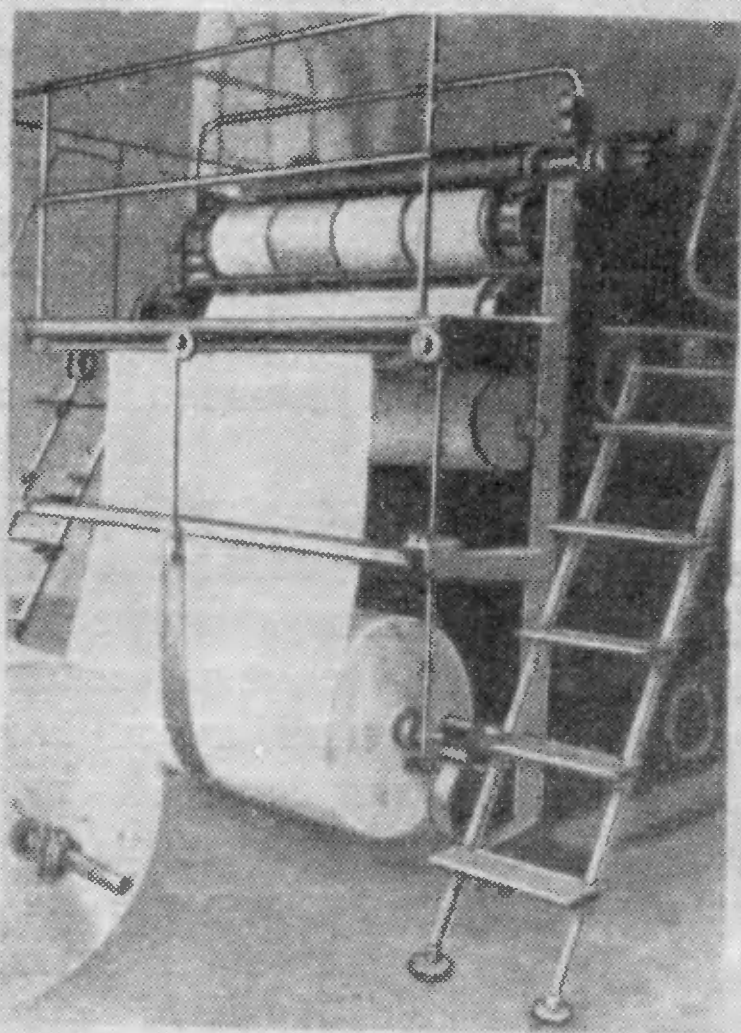


Abb. 52

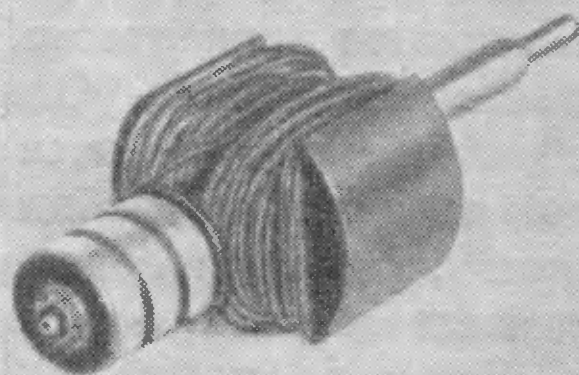


Abb. 53

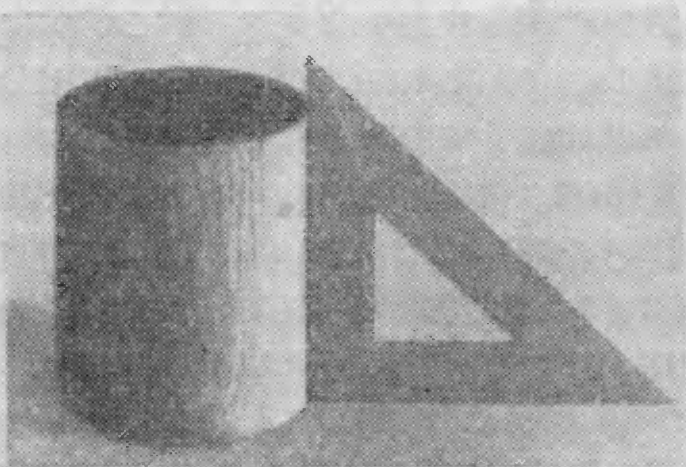


Abb. 54

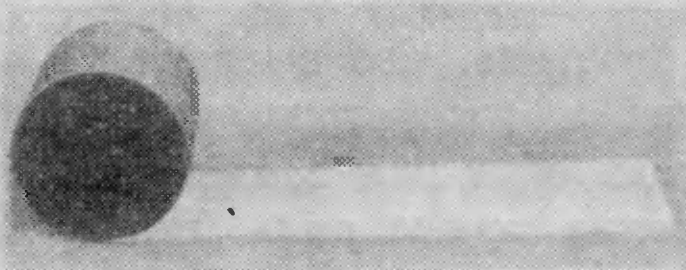


Abb. 55

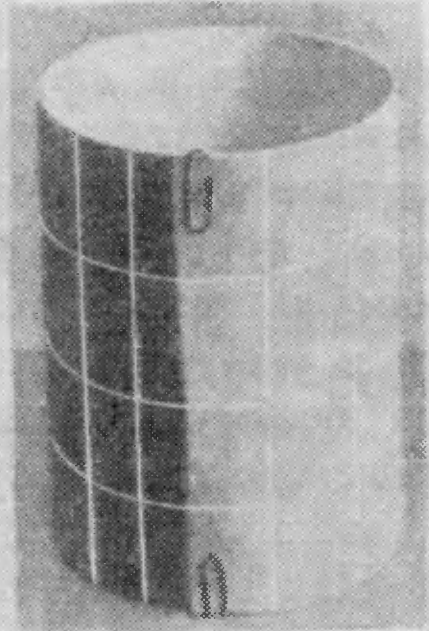


Abb. 56

Zeichne ein Rechteck $ABCD$ und in ihm einige Parallelen zu den Seiten! Schneide das Rechteck aus und rolle es so zu einem Zylindermantel zusammen, daß der Punkt A auf den Punkt B und der Punkt D auf den Punkt C fällt! Wie verlaufen auf dem Mantel des Zylinders die Parallelen zu der Seite AB und wie die Parallelen zu der Seite AD ? Die Parallelen zu AD nennt man Mantellinien des Zylinders (Abb. 56).

Worin unterscheidet sich ein gerader Kreiszylinder von einem Faß?

Bei einem Faß ist es nicht möglich, gerade Linien zu finden, die ganz in der Mantelfläche verlaufen. Man kann den Mantel eines Fasses nicht auf einer ebenen Fläche abrollen.

Die Abbildung 57 zeigt einen schiefen Kreiszylinder. Man kann den Mantel dieses schiefen Kreiszylinders so aufschneiden und ausrollen, daß die in Abbildung 58 dargestellte Figur entsteht.

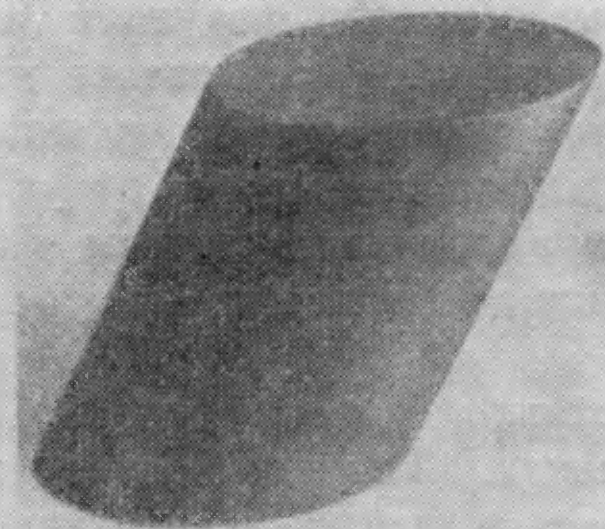


Abb. 57

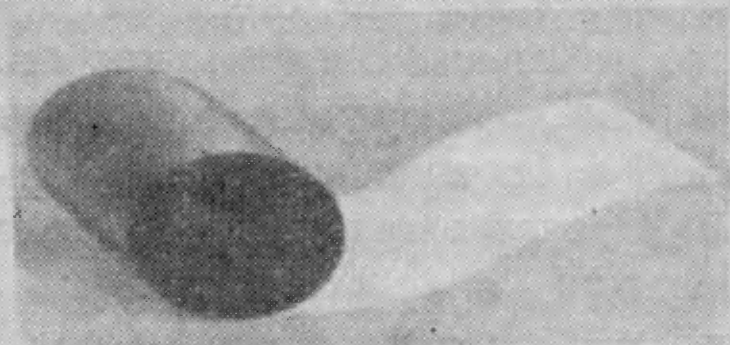


Abb. 58

также описанию измерительных и других геометрических приборов. Внешним проявлением такого сближения с практическими приложениями служит следующее обстоятельство: больше 25^0_0 всех рисунков, содержащихся в геометрических главах рассматриваемых учебников, составляют не абстрактные геометрические чертежи, а разного рода предметные изображения: изображения тел, имеющих рассматриваемую в данный момент геометрическую форму, измерительных инструментов, фотографии геометрических моделей и т. п.¹⁾ Обилие таких изображений в учебниках придает многим их страницам внешний вид, совершенно необычный для наших учебников геометрии (см., например, воспроизведенный на стр. 282—283 разворот двух страниц учебника для 6-го класса, 2-я часть).

4) При этом, однако, нельзя не отметить, что выдвижение на первый план прикладных целей приводит в рассматриваемых учебниках к тому, что *общеобразовательные цели обучения геометрии как дедуктивной науки играют в построении курса роль меньшую, чем следовало бы*. Так, мы уже указывали на игнорирование принципиальных вопросов теории измерения геометрических величин. Кроме того, некоторые вопросы, рассматривающиеся в 6 и 7 классах без точных определений, без выяснения точного смысла отдельных утверждений и т. д., в дальнейшем не повторяются. Так обстоит дело, например, с теорией параллельных. Особенно пострадавшей в отношении своей логической структуры является стереометрическая часть курса геометрии. Вопросы взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве вообще самостоятельно не рассматриваются; о них упоминается лишь попутно, вскользь, в разных местах курса: например, определение перпендикулярности прямой к плоскости дается в 6 классе, в связи с понятием прямого кругового конуса, о существовании скрещивающихся прямых упоминается в 10 классе, при изучении изображения прямой в двух ортогональных проекциях. В результате этого — ни свойства многогранников, ни свойства параллельной проекции, ни какие-либо другие стереометрические предложения не могут быть строго доказаны. В отношении свойств многогранников авторы частично устраняют возникающие здесь затруднения введением избыточных требований в определения многогранников.

5) Представляет интерес также *система упражнений по курсу геометрии* в рассматриваемых учебниках. Геометрические задачи здесь, в общем, проще, чем содержащиеся в наших задачниках. При этом задачи на вычисление редко носят абстрактный характер; в большинстве своем они имеют конкретное, прикладное содержание; задачи на доказательство чаще всего так или иначе дополняют излагаемый теоретический материал, а не являются только лишь его применением.

¹⁾ Укажем для сравнения, что в учебнике геометрии А. П. Киселева вместе с задачиком Н. Рыбкина такие изображения составляют лишь около 4^0_0 всех рисунков (только в учебнике Киселева — $2,5^0_0$), в учебнике Н. Н. Никитина и А. И. Фетисова — около 8^0_0 всех рисунков.

Большое число упражнений носит характер теоретических вопросов, имеющих целью способствовать выработке отчетливых наглядных представлений об изучаемых понятиях, например: какие треугольники (и четырехугольники) всегда подобны между собой? при каких условиях будут подобны между собой равнобедренные треугольники, параллелограммы, ромбы, прямоугольники? Ту же цель преследуют упражнения, в которых учащиеся должны, так сказать, собственными руками поработать с изучаемыми геометрическими объектами, — например, по данной выкройке одного рукава начертить выкройку другого (в связи с изучением осевой симметрии), или уменьшить в несколько раз данную фигуру, или изготовить развертку тела. Отметим, что такие упражнения (методическое значение которых, по нашему мнению, несомненно) лишают обучение геометрии того характера исключительно лишь умственной деятельности, который оно зачастую имеет.

Среди геометрических упражнений значительное место занимают задачи с практическим содержанием. Эти задачи весьма разнообразны как по диапазону рассматриваемых в них приложений (от кровати-раскладушки до узлов двигателей), так и по характеру задания (объяснить геометрические принципы конструкции, обосновать применяемую на практике формулу, разобраться в устройстве и применении того или иного инструмента и т. п.).

IV. Тригонометрия

8. Тригонометрия в рассматриваемых учебниках представлена двумя темами: темой «*Тригонометрические функции*» в 10 классе и темой «*Сферическая тригонометрия*» в 12 классе.

В десятом классе тема начинается с определения тригонометрических функций острого угла как отношений сторон прямоугольного треугольника, а также — как координат точки единичной окружности. После этого устанавливаются соотношения между функциями одного и того же угла и затем рассматривается решение прямоугольных треугольников (с помощью натуральных и логарифмических таблиц тригонометрических функций). Далее определение тригонометрических функций распространяется на произвольный угол (меньший, чем 360°), выводятся формулы приведения (только для случая, когда переменный угол — в первой четверти) и рассматривается решение косоугольных треугольников: излагаются теоремы синусов, косинусов, тангенсов и формулы Мольвейде.

В последней части этой темы вводится радианная мера углов, обобщается определение на произвольный аргумент, устанавливается периодичность этих функций, после чего выводятся формулы сложения и обычные следствия из них (выражения тригонометрических функций двойного и половинного аргументов и формулы преобразования суммы в произведение). Формулы сложения вводятся с помощью теоремы синусов для углов треугольника, а затем обобщаются на произвольные углы.

Этим исчерпывается содержание темы «Тригонометрические функции» в 10 классе. Обратные тригонометрические функции здесь не рассматриваются — они изучаются в 11 классе, в курсе математического анализа. Упражнения по этой теме в большинстве своем связаны с решением треугольников. Поскольку теория тригонометрических функций также группируется вокруг вопросов решения треугольников, можно сказать, что эти вопросы образуют в рассматриваемых учебниках некоторый «центральный стержень» курса элементарной тригонометрии.

Сферическая тригонометрия рассматривается в 12 классе примерно в объеме соответствующего раздела курса элементарной математики в наших педагогических институтах. И здесь много внимания уделяется приложениям — некоторым вопросам геодезии и навигации.

V. Математический анализ

9. Математический анализ составляет основное содержание курса математики в 11 и 12 классах, где он излагался примерно в объеме программ наших учительских институтов. Содержание соответствующих глав курса 11 класса достаточно подробно изложено в уже упоминавшейся статье Л. Н. Миловановой. В 12 классе к математическому анализу относится тема «Приближенные вычисления», в которой рассматриваются методы приближенного вычисления значений функций и приближенного решения уравнений (методы хорд и касательных). После этого излагается теория рядов, в которую входит формула Тэйлора с остаточным членом; здесь же излагаются теоремы Ролля, Лагранжа и Коши, числовые ряды и признаки их сходимости, разложение элементарных функций в степенные ряды.

10. Отметим некоторые существенные моменты в построении курса математического анализа в рассматриваемых учебниках.

1) Изложение основных вопросов *дифференциального и интегрального исчисления ведется одновременно с подробным исследованием отдельных классов элементарных функций*. Так, непосредственно после введения понятия производной выводятся лишь формулы дифференцирования суммы и произведения функции на константу, после чего подробно рассматриваются целые рациональные функции. Далее выводятся формулы дифференцирования частного и изучаются дробно-рациональные функции и т. д.

2) В курсе математического анализа *уточняются некоторые понятия, используемые в предыдущих разделах на основе лишь интуитивных представлений*. Так обстоит дело с понятием возрастания и убывания функции, а также предела последовательности (которое многократно использовалось ранее без точных определений, с помощью разного рода описательных выражений).

3) Благодаря этому обнаруживаются различные взаимосвязи между элементами математического анализа и другими разделами курса мате-

матики, так что *элементы математического анализа оказываются не обособленным придатком, а естественным завершением всего курса элементарной математики*. Следует, однако, отметить, что связи между элементами анализа и другими разделами курса математики не всегда выявляются в полной мере. Так, например, тема «Приближенные вычисления» в 12 классе не опирается на дифференциальное исчисление, изучаемое в 11 классе, так что многие формулы выводятся здесь по существу заново.

4) *Уровень строгости при изложении дифференциального и интегрального исчисления много ниже того, который считается у нас необходимым* в отношении соответствующей темы новой программы. Так, например, определение предела функции вообще не формулируется, связь возрастания или убывания функции со знаком ее производной устанавливается (в обе стороны) только геометрическими соображениями. По сравнению с этим *изучение теории рядов ведется на более высоком уровне*, который, однако, не подготовлен всем предыдущим изложением.

Таково общее строение курса математики, содержащегося в рассматриваемых учебниках для школ ГДР.

VI. Общие замечания

11. Подчеркнем еще раз некоторые основные моменты этого курса в целом.

1) Принципы отбора материала. При отборе материала основную роль играют, по-видимому, требования практической его приложимости. В связи с этим в учебниках рассматриваются вопросы, до настоящего времени не нашедшие себе места в нашей школе. Сюда относятся, кроме глав математического анализа и аналитической геометрии, также элементы теории приближенных вычислений и начертательной геометрии.

С другой стороны, в рассматриваемых учебниках отсутствуют некоторые темы, прочно входящие в курс советской школы. Так, в курсе алгебры нет тем «Неравенства» и «Исследование уравнений», в курсе геометрии — темы, связанной с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве, с измерением двугранных углов и т. п.

Встречаются в рассматриваемых учебниках также отдельные вопросы, включенные в курс математики из-за их научного значения, например понятие *о группе геометрических преобразований*. Впрочем, значение этого понятия не раскрыто сколько-нибудь полно в рассматриваемом учебнике¹⁾.

Отметим, что в рассматриваемом курсе имеются и некоторые темы, лишенные как прикладного значения, так и научного интереса. К таким

¹⁾ Да и не может быть, по нашему убеждению, раскрыто в курсе математики средней школы.

темам можно отнести комбинаторику, рассматриваемую без элементов теории вероятностей или математической статистики, а также элементы проективной геометрии, важность которых, ввиду чрезвычайной ограниченности их объема, никак не может быть мотивирована.

2) *Научный уровень изложения материала.* Стремление авторов рассматриваемых учебников изложить наибольшее количество фактического материала и при этом максимально выявить его практическую приложимость во многом определяет и научный уровень всего курса математики. В алгебре указанное стремление привело к группировке различных вопросов вокруг идеи функциональной зависимости, к акцентированию во всех основных темах функционального материала. Тем самым, курс алгебры приобрел некоторую стройность и целеустремленность, общий объект изучения и общую точку зрения на изучаемый материал. Таким образом, можно сказать, что *курс алгебры выиграл в отношении своего научного уровня*. Необходимо отметить также, что существенную роль в таком построении курса алгебры, несомненно, сыграла необходимость как-то подготовить учащихся к изучению в дальнейшем элементов математического анализа.

В курсе же геометрии указанное выше стремление повлекло за собой *разрушение* всей дедуктивной системы, которое вполне оправдывается педагогическими соображениями на первых порах, но по отношению ко всему курсу является, по нашему мнению, уже нежелательным. Таким образом, *научный уровень курса геометрии, содержащегося в рассматриваемых учебниках, в целом ниже, чем он должен был бы быть с точки зрения воспитательных и общеобразовательных задач обучения математике*. Этот уровень во всяком случае ниже, чем научный уровень курса геометрии советской средней школы.

3) Система упражнений. Особый интерес представляет подбор упражнений, имеющийся в рассматриваемых учебниках.

Упражнения в подавляющем большинстве существенно *легче* тех, которые содержатся в задачниках для нашей школы. При этом комбинированные упражнения, т. е. такие, которые требуют для своего выполнения привлечения материала различных разделов курса математики, встречаются реже, чем у нас, и всегда только там, где действительно обнаруживается органическая связь между различными разделами (например, упражнения с функциональным содержанием в алгебре). В частности, полностью отсутствуют еще имеющиеся в наших задачниках так называемые «шитые» задачи, вроде, например, такой:

«Сколько надо взять членов в убывающей арифметической прогрессии — 100, 96, 92, ..., чтобы сумма была равна сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первые два члена равны соответственно восьмому и девятому членам данной арифметической прогрессии?»¹⁾.

¹⁾ П. А. Ларичев, Сборник задач по алгебре, № 1224 (1), М., 1953.

Упражнения, содержащиеся в рассматриваемых учебниках, требуют от учащихся работы не только «головой», но и «руками». Укажем в этой связи на графические упражнения в алгебре, на экспериментальное установление некоторых фактов в геометрии и т. п.

Заслуживает быть отмечена также *содержательность упражнений*, имеющихся в рассматриваемых учебниках. Мы имеем в виду не только задачи с так называемым «практическим содержанием» (подбор которых не может не заинтересовать советского учителя); часто задачи отвлеченного, чисто математического характера также не только преследуют цель закрепления того или иного теоретического положения, но и представляют по своему содержанию самостоятельный интерес. Содержание таких упражнений иногда бывает существенно для других разделов курса математики; в таком случае эти упражнения несут, так сказать, двойную нагрузку. Так, например, в числе упражнений, связанных с теоремами о пропорциональных отрезках, предлагается вывести уравнение прямой, проходящей через две данные точки (координаты которых каждый раз задаются конкретно), а также рассматривается линейное интерполирование функций.

12. Чтобы читатель имел возможность более ясно представить себе общий характер системы упражнений, содержащихся в рассматриваемых учебниках, приведем в качестве примера полностью упражнения по теме «Арифметическая прогрессия»¹⁾.

1. Отметить на чертеже (в прямоугольной системе координат) пять первых членов арифметической прогрессии и их суммы, если: а) $x_1 = 3$, $d = \frac{1}{2}$; б) $x_1 = 1$, $d = 3$; в) $x_1 = 13$, $d = -2$. Полученные точки соединить штриховой линией.

2. В арифметической прогрессии дано:

а) $x_1 = 65$ и $x_8 = 72$; б) $x_3 = 35$ и $x_4 = 46$; в) $x_5 = 38$ и $x_6 = 27$.

Чему равна разность d , первый член x_1 , и как выглядит общий член x_n ?

3. В арифметической прогрессии дано:

а) $x_5 = 20$ и $x_{11} = 44$, б) $x_{10} = 39$ и $x_{14} = 24$.

Найти разность d , первый член x_1 и член x_{25} .

У к а з а н и е: представить разность данных членов в общем виде и отсюда найти разность d .

4. Дано, что $x_6 + x_{12} = 47$ и $x_7 + x_{15} = 57$. Найти разность прогрессии, первый член и x_{25} .

У к а з а н и е: выразить сумму данных членов в общем виде и решить полученные два уравнения с двумя неизвестными.

5. Даны суммы $x_5 + x_{11} = 58$ и $x_6 + x_{14} = 40$. Определить x_1 и x_{10} .

У к а з а н и е: ср. предыдущую задачу.

6. Арифметическая прогрессия определяется заданием любых трех из пяти чисел x_1 , x_n , d , n , s ; а) составить все возможные группы данных; сколько их? б) для каждой группы данных составить формулы вычисления остальных двух величин.

¹⁾ Учебник для 10-го класса, стр. 130—132.

7. Двутавровые балки (см. рис. 6) имеют согласно существующим стандартам (DIN 1025, л. 1) размеры, указанные в таблице:

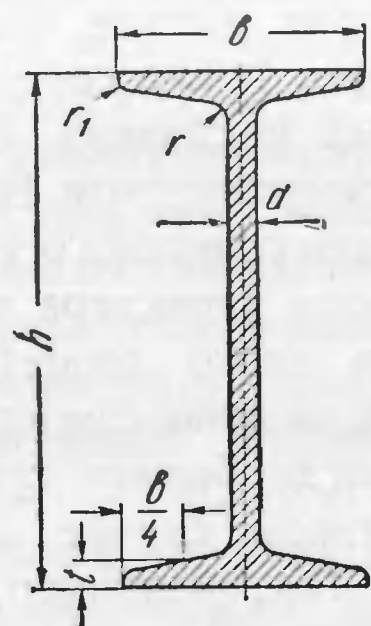


Рис. 6.

Обозначение	Размеры (мм)						Площадь сечения (см ²) <i>F</i>	Вес <i>G</i>
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	<i>r</i>	<i>r</i> ₁		
8	80	42	3,9	5,9	3,9	2,3	7,58	5,95
10	100	50	4,5	6,8	4,5	2,7	10,6	8,32
12	120	58	5,1	7,7	5,1	3,1	14,2	11,2
14	140	66	5,7	8,6	5,7	3,4	18,3	14,4
16	160	74	6,3	9,5	6,3	3,8	22,8	17,9
18	180	82	6,9	10,4	6,9	4,1	27,9	21,9
20	200	90	7,5	11,3	7,5	4,5	33,5	26,3
22	220	98	8,1	12,2	8,1	4,9	39,6	31,1
24	240	106	8,7	13,1	8,7	5,2	46,1	36,2
26	260	113	9,4	14,1	9,4	5,6	53,4	41,9
28	280	119	10,1	15,2	10,1	6,1	61,1	48,0
30	300	125	10,8	16,2	10,8	6,5	69,1	54,2
32	320	131	11,5	17,3	11,5	6,9	77,8	61,1
34	340	137	12,2	18,3	12,2	7,3	86,8	68,1
36	360	143	13,0	19,5	13,0	7,8	97,1	76,2
38	380	149	13,7	20,5	13,7	8,2	107	84,0
40	400	155	14,4	21,6	14,4	8,6	118	92,6
42 ¹ / ₂	425	163	15,3	23,0	15,3	9,2	132	104
45	450	170	16,2	24,3	16,2	9,7	147	115
47 ¹ / ₂	475	178	17,1	25,6	17,1	10,3	163	128
50	500	185	18,0	27,0	18,0	10,8	180	141
55	550	200	19,0	30,0	19,0	11,9	213	167
60	600	215	21,6	32,4	21,6	13,0	254	199

Проверить, составляют ли эти размеры арифметические прогрессии, и найти разности этих прогрессий. Отметить значение каждого размера на чертеже в порядке их возрастания.

Проверить, составляют ли арифметическую прогрессию площадь поперечного сечения балки *F* и ее вес *G*. Представить геометрически *F* и *G* как функцию высоты *h*.

8. Дано:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
x_1	10	16	25	$\frac{3}{4}$	120	0
x_n	80	676	35	$\frac{4}{3}$	15	-6
d	5	11	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	-7	-2
n	15	61	16	8	16	10
s_n	675	21106	480	$\frac{25}{3}$	1080	-30

Выбрать в каждом из столбцов от а) до f) три числа и вычислить два остальных.

9. Являются ли три значения, которыми определяется арифметическая прогрессия, произвольными? Какие значения годятся для n ?

10. Даны x_1 , x_n и s_n . Показать, что d есть дробь с числителем $x_n - x_1$ и n есть дробь с знаменателем $x_1 + x_n$.

11. Определить сумму натуральных чисел от 1 до 100. Карл Фридрих Гаусс (родился в 1777 г. в Брауншвейге, умер профессором астрономии в 1855 г. в Геттингене) решил эту задачу, когда ему было 9 лет. Он показал сначала, что суммы членов, равноотстоящих от концов, равны между собой. Например,

$$\overbrace{1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100}^{\text{соединенных скобками}}$$

Каковы здесь суммы членов, соединенных скобками?

12. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — арифметическая прогрессия. Показать, что $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}$ и $x_1, x_5, x_9, \dots, x_{4n+1}$ также являются арифметическими прогрессиями. Чему равны разности этих прогрессий?

13. а) Показать, что значения функции $y = 2x + 3$ для целых значений $x = 1, 2, 3, \dots$ образуют арифметическую прогрессию.

б) Доказать это для любой линейной функции $y = mx + b$. Доказать, что если значения аргумента образуют арифметическую прогрессию, то и значения любой линейной функции также образуют арифметическую прогрессию.

Указание: подставить $x = a_1 + (n-1)d$ в уравнение, определяющее функцию.

14. Какими линейными функциями определяются следующие прогрессии:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $(y_n) = (4, 8, 12, 16, \dots)$ | для $(x_n) = (1, 3, 5, 7, \dots)$; |
| b) $(y_n) = (30, 25, 20, 15, \dots)$ | » $(x_n) = (2, 6, 10, 14, \dots)$; |
| c) $(y_n) = (3, 3^{1/2}, 4, 4^{1/2}, \dots)$ | » $(x_n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$; |
| d) $(y_n) = (6, 5^{3/4}, 5^{1/2}, 5^{1/4}, \dots)$ | » $(x_n) = (1, 3, 5, 7, \dots)$? |

Указание: зная соответствующие значения x и y , найти m и b из формулы $y = mx + b$.

15. Часы отбивают только целые часы. Сколько ударов отобьют они за 12 часов?

16. Башенные часы отбивают целые часы и, кроме того, бьют при каждом полном часе еще 4 раза, каждую четверть (после полного часа) — 1 раз, каждую половину — 2 раза и каждые три четверти часа — 4 раза. Сколько ударов бьют часы за сутки?

17. На рис. 7 значения y_1, y_2, y_3, \dots являются членами арифметической прогрессии $y = mx + b$. Вывести из этого чертежа, что $2s_n = n(y_1 + y_n)$.

У к а з а н и е: рассмотрите в направлении от x_1 до x_n и обратно две трапеции, расположенные симметрично относительно центра.

18. В витрине расставлены консервные банки так, как показано на рис. 8. В нижнем ряду стоит 20 банок. Сколько их всего?

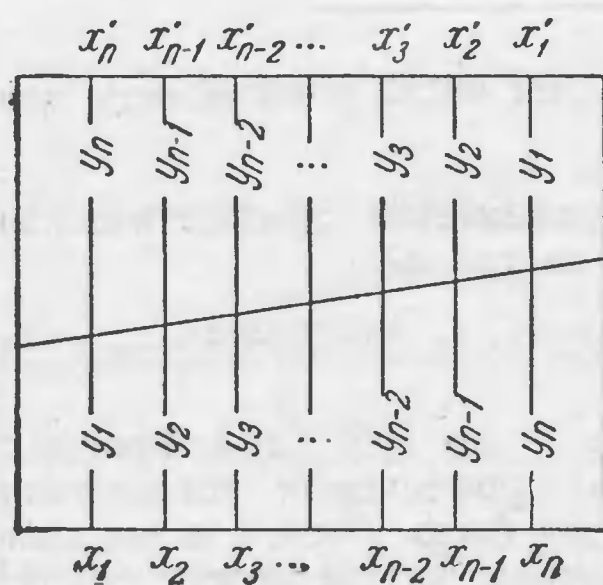


Рис. 7.

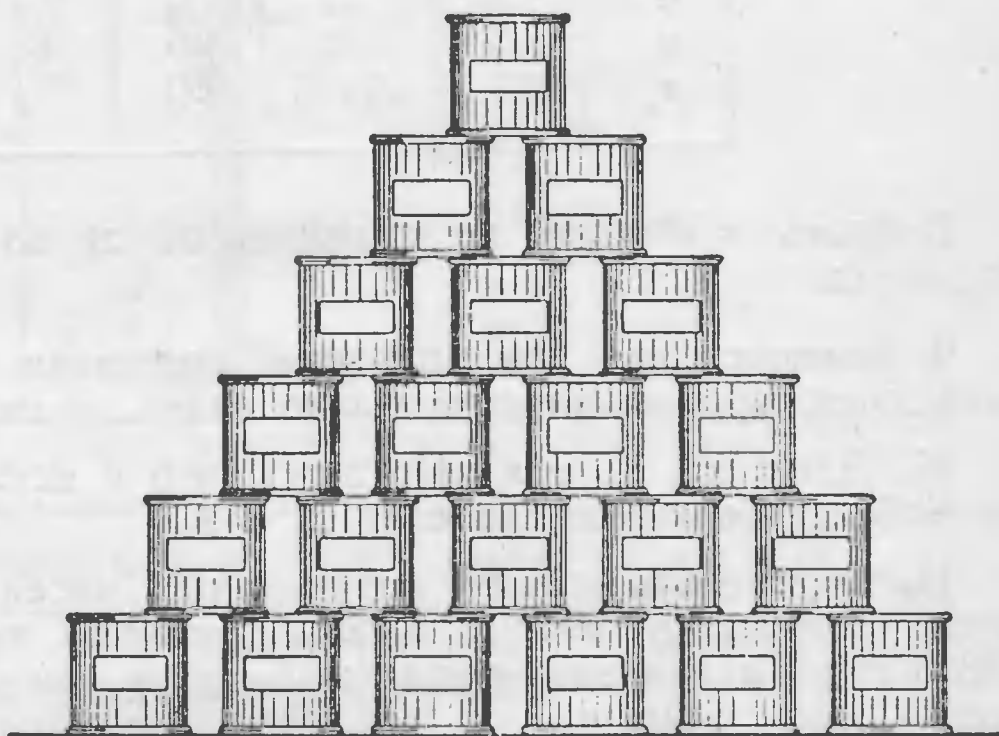


Рис. 8.

19. Шахтный подъемник состоит из лебедки с узким цилиндрическим барабаном, имеющим ту же ширину, что и лента прямоугольного сечения, на которой висит клеть. При вращении лебедки лента наматывается на барабан так, что ее витки располагаются один над другим.

а) Сколько витков ленты будет на барабане при поднятой вверх клетки, если толщина ленты $d = 3$ см, радиус барабана $r = 1$ м и глубина шахты 400 м?

б) Подъемник имеет две клетки, барабаны которых расположены на общем валу. Ленты, на которых укреплены эти клетки, опускаются в шахту по разные стороны общего вала таким образом, что, когда одна клетка находится наверху, другая оказывается внизу. Где встретятся поднимающаяся и опускающаяся клетки?

Ввиду малой толщины ленты небольшим отклонением формы каждого ее витка от круговой можно пренебречь. Можно не учитывать также растяжения ленты.

Сравнение этой системы упражнений с системой задач на соответствующий материал, содержащийся в любом из наших задачников, представляется нам поучительным.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ЗАДАЧНИКЕ В. А. ЖАРОВА

Н. М. Бескин

(Москва)

В. А. Жаров, Задачи по курсу геометрии VII класса, Ярославль, 1956 г., 32 стр.; Задачи по курсу геометрии VIII класса, Ярославль, 1957, 33 стр.

Кафедра элементарной математики Ярославского пединститута выпустила две брошюры В. А. Жарова, содержащие задачи по курсу геометрии 7-го и 8-го классов. Изданные небольшим тиражом (первая — 400 экз., вторая — 450), эти брошюры будут прочтены лишь немногими математиками. А между тем они заслуживают самого широкого распространения. Цель настоящей заметки — привлечь внимание к этим брошюрам.

Достоинство задач В. А. Жарова в том, что это — настоящие *геометрические* задачи. В школьных задачниках встречается множество псевдогеометрических задач. Псевдогеометрические задачи — это задачи на геометрические темы, но такие, что для их решения не приходится прибегать к специфическому геометрическому мышлению. Например, задача «Вычислить объем шара, зная, что его поверхность равна Q », требует комбинирования формул. Это — псевдогеометрическая задача.

Задача «Найти все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию» — алгебраическая задача.

Все задачи из задачников В. А. Жарова таковы, что их решение требует чисто геометрических рассуждений. Например,

«Справедливо ли утверждение: „Для того чтобы четырехугольник был трапецией, необходимо и достаточно, чтобы отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, был равен полусумме двух других сторон?“»

«Из точки P окружности проведены три хорды. Доказать, что середины этих хорд и точка P являются вершинами вписанного четырехугольника».

Разумеется, эти геометрические задачи — не новость, и задачи В. А. Жарова, вероятно, в большинстве случаев не оригинальны. Но казалось, что такие задачи — всегда трудные. Сборники В. А. Жарова

опровергают это мнение. Ему удалось собрать большое количество задач, вполне пригодных для школьного преподавания. Задачник В. А. Жарова — это не задачник типа Делоне и Житомирского¹⁾. Он предназначен не для математического кружка, а для повседневного использования в классе. Две задачи, цитированные выше, принадлежат к сравнительно трудным (они снабжены указанием на способ решения). А вот еще два примера:

«Четырехугольник разбит одной из диагоналей на два треугольника, в которые вписаны окружности. Доказать, что если эти окружности касаются, то в четырехугольник можно вписать окружность».

«Доказать, что если две concentрические окружности пересечены прямой, то отрезки этой прямой, заключенные между двумя окружностями, равны».

Эти задачи врезаются в память (у них интересная «геометрическая фабула»), и в то же время они — совсем легкие.

В задачнике много таких интересных задач, которые, вероятно, запомнятся ученикам навсегда. Например,

«Если медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части, то треугольник — прямоугольный (доказать)».

«Если около четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность, то площадь четырехугольника равна квадратному корню из произведения его сторон».

Большая заслуга В. А. Жарова заключается в том, что он собрал много таких чисто геометрических и в то же время доступных рядовому школьнику задач: в первом сборнике — 155 задач, во втором — 157.

Особое внимание автор уделил характеристическим свойствам геометрических фигур. Для этого в задачнике систематически рассматриваются предложения, обратные тем теоремам школьного курса, в которых доказываются свойства фигур. Проверка истинности этих предложений весьма полезна для логического развития школьников.

Много задач посвящено геометрическим преобразованиям (осевая и центральная симметрия, параллельный перенос, вращение вокруг точки, гомотетия).

Есть задачи практического характера. Они не выпадают из общего стиля сборника, т. е. их сущность — чисто геометрическая. Например,

«Чтобы проверить, имеет ли отрезанный кусок материи форму квадрата, швея сгибает его по каждой диагонали и выясняет, совпадают ли края обеих его частей. Достаточна ли такая проверка?».

Нельзя сказать, что все до одной задачи хороши. Есть некоторое число вялых и неинтересных задач, но их мало, и они не влияют на общую оценку задачника.

¹⁾ Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, Гостехиздат, М.—Л. (выдержал ряд изданий).

Задачники В. А. Жарова — произведение большой педагогической культуры. На русском языке не существует задачников такого типа (есть сборники занимательных задач, и есть задачники повышенной трудности, но нет задачника с таким содержанием для нормальной школьной работы).

У нас возникают три пожелания.

1) Чтобы задачник В. А. Жарова был переиздан Учпедгизом. Это дало бы возможность многим учителям пользоваться им.

2) Чтобы после этого часть задач В. А. Жарова была внедрена в стабильный школьный задачник.

Дело в том, что задачник такого специального содержания, как данный, не может служить школьным задачником. Школьный задачник должен быть универсальным. Задачник В. А. Жарова восполняет пробелы школьных задачников. Автор правильно назвал свои книжки «Дополнение к стабильному задачнику». Поэтому задачи В. А. Жарова должны быть внедрены в стабильный задачник. Каждая задача должна быть включена органически, т. е. в надлежащем окружении как составная часть некоторой темы.

3) Чтобы автор продолжил свою работу, распространив ее на весь школьный курс геометрии.

ГДЕ ОШИБКА?

Рассмотрим бесконечно протяженную плоскую фигуру A , ограниченную плоской кривой, ее асимптотой и перпендикуляром, опущенным из точки этой кривой на асимптоту.



Кривая пусть будет такой, что площадь фигуры A бесконечная, но объем тела \tilde{A} , полученного вращением A вокруг асимптоты, конечен и равен V . Как известно, такие кривые существуют; например, для гиперболы $y = 1/x$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty, \text{ но } \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi.$$

Представим себе, что полученное тело вращения \tilde{A} — полое, и заполним его краской. Начнем равномерно покрывать фигуру A тонким слоем этой краски слева направо (от перпендикуляра к острию) до тех пор, пока весь запас краски, заполняющей тело \tilde{A} , не исчерпается. Так как фигура A имеет бесконечную площадь, то какой бы тонкий слой краски мы ни взяли, мы не сможем закрасить всю фигуру A и будем вынуждены ограничиться только ее частью B до некоторого перпендикуляра. Эта закрашенная часть B на нашем рисунке заштрихована.

При вращении фигуры A вокруг асимптоты, ее часть B опишет тело \tilde{B} конечной протяженности, являющееся частью всего бесконечно протяженного тела \tilde{A} .

Очевидно, вращая фигуру B , мы получим тело \tilde{B} , имеющее гораздо больший объем, чем объем слоя краски, которым покрыта фигура B . Это следует и из теоремы Гюльдена: объем тела \tilde{B} равен произведению площади фигуры B на длину окружности, описанной движением центра тяжести фигуры B . Следовательно, сделав толщину слоя краски меньше, чем длина этой окружности, мы получим, что объем тела \tilde{B} будет больше, чем объем всей имеющейся в нашем распоряжении краски. А этот последний равен V — объему тела \tilde{A} . Но тело \tilde{B} есть часть тела \tilde{A} .

Следовательно, конечная величина оказывается меньше своей части!! В чем дело?

Идея заимствована из *The American Mathematical Monthly*.

ИНТЕРЕСНАЯ КНИГА О ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ И ФИГУРАХ

И. М. Яглом

(Москва)

H. G. Eggleston, *Problems in Euclidean space: application of convexity*. London — New York — Paris — Los Angeles, 1957, 165 стр.

Книга Г. Г. Эгглстона «Задачи в евклидовом пространстве — приложения выпуклости», вышедшая в свет в 1957 г. в недавно основанной «Интернациональной серии монографий по чистой и прикладной математике», представляет собой своеобразное явление. Автор поставил целью проиллюстрировать роль, которую играет понятие *выпуклости* в современной геометрии. Он собрал ряд изолированных задач, так или иначе связанных с понятием выпуклости. Основанием для классификации этих задач служит большая или меньшая роль выпуклости в условиях задач и в их решениях: если в гл. I приведены некоторые достаточно общие результаты теоретико-множественного характера, то заключающая книгу гл. IV посвящена совершенно конкретным вопросам, относящимся к очень узким классам выпуклых фигур.

Разумеется, выбор задач здесь можно произвести далеко не единственным способом, и книга Эгглстона, из которой полностью исключены дифференциально-геометрические рассуждения, вряд ли претендует на то, чтобы осветить значение условия выпуклости точечного множества хоть с какой-либо полнотой. Подбор материала в этой книге явно диктуется в первую очередь личными вкусами автора¹⁾ и производит впечатление случайного. Однако все рассмотренные задачи интересны, и это вполне оправдывает их включение в книгу, которая, безусловно, может заинтересовать молодого математика и поставить перед ним новые вопросы.

Перейдем к конкретному содержанию книги.

Выше мы уже охарактеризовали кратко первую главу книги. В качестве рассмотренных здесь задач приведем следующую. Пусть X —

¹⁾ Большая часть содержания книги базируется на его собственных исследованиях и на исследованиях А. С. Безиковича.

произвольное плоское множество, линейная мера Хаусдорфа которого равна Λ^1), μ есть нижняя грань мер проекций X на всевозможные направления; требуется оценить наименьшее возможное значение μ (при заданном Λ). Если X — выпуклая кривая, то μ — так называемая наименьшая ширина или просто ширина X ; таким образом, приведенная здесь задача Эгглстона есть обобщение известной задачи о связи периметра и ширины выпуклой кривой²). Автор дает нетривиальные оценки отношения $\mu:\Lambda$ для разных классов плоских множеств (произвольное измеримое по Хаусдорфу множество; связанное множество; простая дуга).

Во второй главе рассмотрена одна-единственная задача, по формулировке не относящаяся специально к выпуклым множествам, но сводящаяся к задаче о свойствах выпуклых множеств. Речь идет об известной гипотезе польского математика К. Борсука, относящейся к разбиению точечных множеств на множества меньшего диаметра.

Борсук доказал, что $(n-1)$ -мерную сферу нельзя разбить на n множеств меньшего диаметра, но можно разбить на $n+1$ подобных множеств, и предположил, что *любое точечное множество n -мерного евклидова пространства можно разбить на $n+1$ множеств меньшего диаметра*. В книге приведено принадлежащее автору изящное геометрическое доказательство гипотезы Борсука для $n=3$ ³).

Третья глава посвящена задачам, уже непосредственно касающимся выпуклых кривых и фигур. В первую очередь здесь рассмотрены некоторые предложения, родственные известным теоремам Доукера.

Теоремы Доукера и предложения Эгглстона относятся к понятиям *выпуклой и вогнутой последовательности* и к обобщению понятия *расстояния*. Последовательность или функция от целочисленного аргумента $n \{x\}$ называется *выпуклой*, если $x_n \leq \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1})$, и *вогнутой*, если $x_n \geq \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1})$. *Расстоянием Δ по площади* двух плоских выпуклых фигур X и Y называется разность между площадью их объединения Σ и их пересечения π ; *расстоянием δ по периметру* этих же фигур называется разность между периметрами Σ и π . Английский математик Доукер показал в 1944 г., что последовательность площадей S_n n -угольников наибольшей возможной площади, вписанных в произвольную выпуклую фигуру X , вогнута; последовательность же площадей S_n n -угольников наименьшей возможной площади, описанных

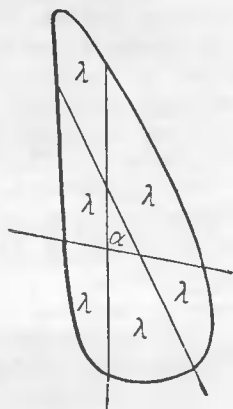
¹) Покроем множество X счетным множеством выпуклых фигур (например, окружностей) и найдем сумму Σ диаметров (расстояний между наиболее удаленными точками) всех этих фигур; нижняя грань Σ (по всем покрытиям) называется *линейной мерой Хаусдорфа* (аналог длины) множества X .

²) См. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры*, М.—Л., 1951, задача 95а.

³) Относительно случая $n=2$ см. Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, *Математические беседы*, М.—Л., 1952, добавление к разделу I.

около X , выпукла¹⁾). Эти результаты показывают, что *наименьшее возможное расстояние Δ_n по площади между выпуклой фигурой X и вписанным в нее (или описанным вокруг нее) многоугольником является выпуклой функцией от n* . Эгглстон с исчерпывающей полнотой рассматривает вопрос о том, *сохраняет ли силу это предложение, если заменить расстояние на площади Δ расстоянием по периметру δ* ; он доказывает вогнутость последовательностей периметров p_n и P_n тех же многоугольников, которые фигурируют в предложении Доукера.

Вторая половина третьей главы посвящена разбору ряда разнородных геометрических задач о выпуклых фигурах, решением которых является треугольник. В качестве примера упомянем здесь о следующем результате: *если три попарно пересекающиеся прямые делят выпуклую фигуру X на семь частей — внутреннюю треугольную часть площади α и шесть частей, имеющих одну и ту же площадь λ (см. рисунок), то $\alpha \leq \frac{1}{8}\lambda$; при этом равенство $\alpha = \frac{1}{8}\lambda$ возможно лишь в том случае, если X есть треугольник*.



Наконец, четвертая глава книги распадается на две части: а) свойства выпуклых фигур постоянной ширины²⁾, б) некоторые свойства треугольников. В первую очередь здесь рассмотрен вопрос о «мере асимметрии» (или «степени симметричности») фигур постоянной ширины. Под «мерой асимметрии» выпуклой фигуры X автор понимает отношение площади X к площади наибольшей заключающейся внутри X центрально-симметричной фигуры; при этом он считает, что постановка (и решение) вопроса о возможных «мерах асимметрии» плоских выпуклых фигур принадлежат А. С. Бзиковичу, не подозревая, что этот вопрос был много раньше детально рассмотрен С. С. Ковнером³⁾. Далее рассмотрен вопрос о «наибольшей» фигуре постоянной ширины, содержащейся внутри заданной фигуры X ширины λ ; здесь показано, что во всех случаях X содержит фигуру постоянной ширины $\lambda:(3 - \sqrt{3})$, причем эта оценка не может быть улучшена.

Раздел четвертой главы, посвященный треугольникам, содержит несколько не связанных между собой задач. Наиболее интересна здесь, пожалуй, последняя задача о «самом выгодном» заполнении равностороннего треугольника Δ (неравными) непересекающимися тре-

¹⁾ См., например, Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., 1958, гл. II, § 3.

²⁾ Об этих фигурах см., например, § 7 названной выше книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского.

³⁾ См., М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, М.—Л., 1935, дополнение 1.

угольниками, стороны которых параллельны сторонам Δ , но ориентация противоположна ориентации Δ (без этого последнего условия Δ можно было бы полностью заполнить одним треугольником); мы не остаемся, однако, на более полной формулировке полученного результата, требующей некоторых дополнительных знаний (размерность множества по Хаусдорфу; впрочем, в книге имеются все нужные определения). Здесь мы скажем о другой задаче, связанной с вопросами, уже затрагивавшимися в «Математическом просвещении». Автор доказывает, что *ширина треугольника, описанного вокруг центрально-симметричной выпуклой фигуры периметра l , не может быть меньше $\frac{1}{2}l$* . Отсюда немедленно выводится, что *каждую центрально-симметричную выпуклую фигуру периметра $l \leq 2d$ можно сдвинуть так, чтобы она целиком заключалась внутри данной выпуклой фигуры Γ ширины d* . Наконец, из последнего результата просто выводится, что никакую выпуклую фигуру ширины $d > d_1 + d_2 + \dots + d_n$ нельзя покрыть n полосами ширины d_1, d_2, \dots, d_n , т. е. решение «проблемы дощечек» Тарского для случая плоскости¹⁾.

В заключение хочется пожелать, чтобы и на русском языке появлялись подобные собрания «Математических этюдов», рассчитанные не на школьника, а на читателя с более высокой подготовкой, например на студента.

¹⁾ По поводу этой проблемы см. «Математическое просвещение», вып. 1, Новости математической науки, п. 3, стр. 214—218.

УНИКАЛЬНЫЙ СБОРНИК ЗАДАЧ (Итоги тридцатилетней деятельности)

А. М. Лопшиц
(Москва)

The Otto Dunkel Memorial Problem Book, дополнительный номер журнала The American Mathematical Monthly под ред. H. Eves и E. P. Starke, 64, № 7, ч. II, 1957, 90 стр.

Какую задачу следует считать хорошей? На этот вопрос трудно ответить даже и тогда, когда он задан более конкретно: «выделить лучшие из тех 2704 задач, которые появились в период между 1918 и 1950 гг. в „Отделе задач“ журнала „Американский математический ежемесячник“ (The American Mathematical Monthly)».

Ответ опубликовала недавно редакция этого журнала, являющегося теперь официальным органом «Американской математической ассоциации» (она объединяет не только ученых и педагогов, преподающих математику в средней и высшей школе, но и большое число студентов, вовлеченных в научную работу).

«Ежемесячник» возник еще в 1894 г. в виде систематически издаваемых сборников задач и решений к ним; за период своего более чем шестидесятилетнего существования он превратился в орган, играющий значительную роль в математическом образовании в Америке.

Было бы интересно дать полный обзор этого издания. Однако мы ограничимся здесь только тем, что ознакомим читателя с недавно вышедшим специальным (дополнительным) номером «Ежемесячника», освещающим лишь одну, но важную сторону его деятельности, которая нашла свое отражение в «Отделе задач». Этот номер посвящен памяти Отто Данкела, руководившего свыше тридцати лет (1918—1950) «Отделом задач» этого журнала.

Номер открывается небольшой статьей о самом Данкеле, написанной П. Райдером (P. R. Rider). Отто Данкел начал свою трудовую жизнь еще в ранние годы, когда его сверстники получали школьное образование. Несмотря на то, что ему поздно удалось поступить в университет (в 1893 г., в возрасте 24 лет), он успешно вел в течение всей своей жизни активную научную работу в области математики и ее преподавания; в последние годы своей жизни он был почетным профес-

сором Вашингтонского университета (в Сан-Луи). Интересно, что значительную часть своих трудов и способностей Данкел отдал «Отделу задач» Monthly. Размах этой работы и ее достижения освещены в заключительной части рецензируемого «мемориального» номера.

Интересные и поучительные сведения об этапах развития «Отдела задач» мы узнаем из статьи К. У. Тригга (C. W. Trigg). В первые годы существования журнал «Monthly» (основанный Б. Финкелем в 1894 г.) представлял собой в основном издание, публикующее задачи из разнообразных областей математики и решения этих задач, и только постепенно «Отдел задач» занял в журнале свое отдельное место.

В течение более чем шестидесятилетнего существования изменялся, конечно, облик «Отдела задач» — постепенно исчезали задачи, трудность решения которых лежала в необходимости произвести сложные выкладки, уменьшалась доля задач, посвященных классической геометрии, увеличивалось число задач из области абстрактной алгебры и топологии. Возросла степень участия в «Отделе задач» активно действующих математиков, приславших задачи, возникавшие как «побочный продукт» их научной работы. Всё больше и больше росло число участников «Отдела задач». Интересно отметить, что их общее число за шестьдесят один год существования этого отдела равно 3487. Они прислали в общей сложности 31624 сообщения (задачи или решения к ним), причем 1564 корреспондента ограничились присылкой одного сообщения, 557 — двух сообщений, 265 — трех, 196 — четырех и 116 — пяти. Пять корреспондентов прислали больше чем 300 сообщений каждый, а один из них, Зерр (G. M. B. Zerr), прислал за 17 лет со дня основания журнала 1697 решений; ближайший к нему «соперник» — Шеффер (I. W. Scheffer) прислал 691 сообщение.

Весьма разнообразен состав корреспондентов: вместе со студентами и преподавателями средней и высшей школы в «Отделе задач» принимают активное участие ученые, известные в Америке и за ее пределами, и рядом с ними — любители математики, принадлежащие к самым различным профессиям.

Плоды деятельности «Отдела задач» превосходно отражены в последнем, но основном разделе мемориального номера, озаглавленном «Четыреста „лучших“ задач (1918—1950)».

Как же решили издатели сборника «трудную задачу» — отбор лучшего, что было помещено в журнале за тридцатилетний период? Решение очень своеобразно: они поручили это двадцати пяти хорошо известным в Америке математикам¹⁾, проявлявшим в течение многих лет активный интерес к «Отделу задач» журнала. Каждый из них сделал свой выбор, и из этого материала был сделан окончательный отбор, в котором основную роль играло «количество голосов».

¹⁾ Многие из них известны и за пределами своей страны, как, например, P. T. Bateman, L. Carlitz, C. W. Trigg и др.

Таким образом, этот сборник нельзя рассматривать как произведение, в котором отразилась тщательно продуманная точка зрения составителя. Но зато, как и всякое голосование, он отражает существующие в кругах «задачных специалистов» тенденции и вопросы и в этом смысле представляет собой один из редких подлинных документов эпохи.

Трудно, конечно, дать общую характеристику точкам зрения на «хорошую задачу», проявившимся в отборе материала. Можно всё же сказать, что одно из основных требований, предъявляемых к задаче, заключается в том, чтобы она была *увлекательна*. А это достигается весьма разнообразными средствами: *новизной* содержания задачи, *удивительностью* высказываемого в условии задачи математического факта, *простотой* содержания, за которой чувствуется *трудность решения*, и т. п.

Не следует, однако, думать, что отобранные задачи имеют эту увлекательность своим единственным качеством — подавляющее большинство задач затрагивает вопросы современной и классической математики, решение которых требует вместе с остроумием и изобретательностью также и умения свободно пользоваться разнообразными средствами математического арсенала. Не вдаваясь в детальную классификацию задач сборника, отметим всё же, что он, конечно, не может служить пособием для овладения каким-либо разделом математики, хотя в нем, например, имеется большой выбор задач по элементарной геометрии, по теории чисел, по анализу, которые могут быть использованы инициативным преподавателем средней и высшей школы в целях повышения интереса учащихся к изучаемому материалу.

Главная же ценность этого уникального во многих отношениях сборника состоит в том, что он, несомненно, будет способствовать развитию творческих способностей учащихся — хорошо ведь известно, что решение нестандартной задачи, требующее применения нестандартных средств, с необходимостью приводит решающего к обнаружению новых связей в рассматриваемом круге вопросов и, таким образом, приводит его не только к доказательству «чужой» теоремы, но и к обнаружению «своей собственной».

Более полному впечатлению о содержании и характере сборника будут способствовать некоторые примеры.

Вот задача, привлекающая своим неожиданным содержанием:

Е—36¹⁾ (В. Н. Вронг). *Показать, что вероятность того, что 13-е число месяца будет пятницей, больше, чем вероятность быть этому числу каким-либо другим днем недели.*

Решение задачи [оно помещено в декабрьском номере журнала за 1933 г.²⁾] несложно по идее — оно основано на том обстоятельстве, что период в 400 лет играет особую роль в нашем календаре.

¹⁾ Буква Е перед номером задачи указывает на то, что задача включена в раздел «элементарных».

²⁾ В дальнейшем мы после текста каждой задачи указываем, в каком номере «Monthly» помещено ее решение.

Вот еще одна задача, в которой необходимость подсчитать вероятность облечена в своеобразную форму:

4161 (R. E. Gaïne). *На прямой участке дороги длиной a км находится n человек. Какова вероятность того, что никакие два из них не находятся друг от друга на расстоянии, меньшем чем b км?* (Решение — декабрь 1946 г.)

Заинтересовывает своей прозрачной формулировкой следующая геометрическая задача:

E — 880 (P. Ungar). *На плоскости задано n точек, которые не лежат все на одной прямой. Доказать, что кратчайший путь, соединяющий все эти точки, представляет собой простой многоугольник (т. е. многоугольник без самопересечений).*

Изящное и в то же время простое решение этой задачи помещено в апреле 1950 г.

А вот задача, которая может быть отнесена к той же группе, что и предшествующая, но оказалась весьма трудной.

E — 735 (P. Erdős). *Шесть точек можно так расположить на плоскости, чтобы все треугольники, образованные какими-либо тремя точками из этих шести, были равнобедренными. Показать, что на плоскости уже нельзя указать семь точек так, чтобы выполнялось указанное условие. Чему равно наименьшее число точек в пространстве, для которых такое расположение невозможно?* (Решение — апрель 1947 г.)

К интересной проблеме общего характера приводит следующая задача:

4014 (P. Erdős) (предложено в 1941 г.). *Показать, что если какие-либо два квадрата, содержащиеся внутри единичного квадрата, не имеют общей точки, то сумма длин их сторон меньше единицы.* (Решение — январь 1943 г.)

Весьма вероятно, что если рассматривать $k^2 + 1$ квадратов, содержащихся внутри единичного квадрата и не имеющих общей точки, то сумма их сторон меньше чем k . Это предположение до сих пор не нашло подтверждения.

Вот несколько задач с простым, но привлекающим внимание содержанием из области арифметики и алгебры.

E — 628 (W. C. Rufus). *Найти наименьшее целое положительное число, половина которого есть полный квадрат, треть которого — куб и пятая доля которого есть пятая степень.* (Решение — февраль 1945 г.)

E — 680 (G. Pall). *Определитель шестого порядка с вещественными элементами, не превышающими единицу, не может быть больше, чем 160.* (Решение — апрель 1946 г.)

3092 (N. A. Court). *Какое соотношение должно связывать коэффициенты кубического уравнения для того, чтобы его корни, рассматриваемые как длины, могли образовать треугольник?* (Решение — май 1925 г.)

3459 (N. Anping). Замечено, что $C_{15}^5 = C_{14}^6 = 3003$. Решить в целых числах уравнение $C_{x+1}^y = C_x^{y+1}$. (Решение — июнь 1936 г.)

4137 (P. Erdős). Если целое число x , не большее чем $\frac{n^2}{4}$, не имеет простого множителя, большего чем n , то $n!$ делится на x . (Решение — январь 1946 г.)

E — 83 (Morgan Ward). Показать, что всякая арифметическая прогрессия с положительными членами, разность которой меньше чем две тысячи, не может содержать больше чем десять последовательных членов, каждый из которых есть простое число. (Решение — октябрь 1934 г.)

Интересно отметить, что требование «положительности» членов прогрессии «почти» не нужно: среди прогрессий, содержащих отрицательные члены, существует только одна, одиннадцать последовательных членов которой суть простые числа; первый член этой прогрессии равен -11 , а ее разность 210 .

3674 (Garrett Birkhoff). Показать, что для всякого положительного целого k выражение $\Phi_k = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} = \frac{1}{2k-1} C_{2k-1}^k$ есть целое число; доказать справедливость рекуррентного соотношения $\Phi_k = \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i \Phi_{n-i}$. (Решение — октябрь 1935 г.)

3954 (Oystein Ore). Из трех элементов a, b, c , заданных в указанном порядке, можно составить $N_3 = 2$ произведения: $(ab)c$ и $a(bc)$, если не считать, что закон ассоциативности имеет место. Аналогично из четырех элементов a, b, c, d можно составить $N_4 = 5$ произведений: $[(ab)c]d, [a(bc)]d, a[(bc)d], a[b(cd)], (ab)(cd)$. Составить общее выражение для числа N_i произведений, которые можно составить с помощью i сомножителей. (Решение — октябрь 1941 г.)

4295 (Irving Kaplansky). Показать, что всякая группа, содержащая больше чем два элемента, допускает автоморфизм, отличный от тождественного преобразования. (Решение — февраль 1956 г.)

Приведем теперь примеры задач из области анализа: по своему содержанию, они доступны широкому кругу читателей, но их решение потребует и внимания и изобретательности.

3965 (H. S. Wall). Показать, что для всякого вещественного или комплексного числа x , модуль которого не превышает единицы,

$$\frac{|x|}{1+|x|} \leq \ln(1+|x|) \leq \frac{|x|(1+|x|)}{1+|x|}.$$

(Решение — январь 1942 г.)

3764 (J. S. Frame). Доказать, что

$$\operatorname{sh}^{n+1} nx + \operatorname{ch}^{n+1} nx < \operatorname{ch}^n (n+1)x$$

для всех вещественных значений x и для всех вещественных значений n , больших чем единица. Показать, что неравенство переходит в противоположное, если $0 < n < 1$ и $x > 0$. (В случае, когда $n=0$ или $n=1$ или когда $x=0$, равенство имеет место.) (Решение — январь 1938 г.)

Обратим внимание на то, что подстановка $z = e^{-2x}$ сводит рассматриваемое неравенство к алгебраическому:

$$(1 - z^n)^{n+1} + (1 + z^n)^{n+1} < 2(1 + z^{n+1})^n \quad (0 < z < 1, n > 1).$$

3690 (W. M. Whyburn). Решить функциональное уравнение

$$f(x)f(-x) = c^2 = [f(0)]^2$$

в предположении, что $f(x)$ — однозначная вещественная функция вещественного переменного, имеющая положительные вещественные значения. (Решение — январь 1936 г.)

4283 (E. P. Starke). Известно, что функция комплексного переменного z , относящая числу z сопряженное ему значение \bar{z} , нигде не аналитическая. Однако на всякой окружности или прямой C можно задать такую функцию $f(z)$, что для всякой конечной точки C она аналитична и принимает значение \bar{z} . Определить другие линии, для которых можно построить функцию, обладающую указанными свойствами. (Решение — август — сентябрь 1949 г.)

Много задач сборника относятся к теории бесконечных рядов. Вот некоторые из них:

4415 (R. P. Woas младший, W. K. Hayman). Найти все те значения для α и β , для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin(n^{\beta})$ сходится. (Решение — июнь — июль 1952 г.)

4305 (H. F. Sandham). Доказать, что

$$1 + \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{4}\right)^2 + \dots = \frac{17\pi^4}{360}.$$

(Решение — апрель 1950 г.)

4066 (Richard Bellman). Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \left[1 + \frac{e}{x} - \frac{e}{1!(x+1)} + \frac{e}{2!(x+2)} - \dots \right] \frac{dx}{\Gamma(x)}.$$

(Решение — октябрь 1944 г.)

Обратим внимание еще на задачу, в которой речь идет об эйлеровой константе:

4353 (H. F. Sandham). Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\frac{\ln n}{\ln 2} \right] = \gamma,$$

где $[x]$ означает целую часть от x и γ — эйлерова константа. (Решение — февраль 1956 г.)

Следующие две задачи объединены общей темой:

3051 (Norman Apping). Задана последовательность

$$u_1 = 2, u_2 = 8, u_n = 4u_{n-1} - 2u_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots);$$

показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} u_n^2 = \frac{\pi}{12}.$$

(Решение — август — сентябрь 1925 г.)

3801 (D. H. Lehmer). Показать, что

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 13 + \operatorname{arctg} 34 + \dots,$$

где целые числа, входящие в правую часть, представляют некоторые числа Фибоначчи, определяемые с помощью рекуррентного соотношения $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$. (Решение — ноябрь 1938 г.)

Помимо задач чисто математического содержания, в сборник вошло много задач с занимательной фабулой, почерпнутой либо из явлений окружающей нас жизни, либо из научных областей, смежных с математикой. Приведем несколько примеров таких задач.

4132 (T. H. Matthews). Самолет, летящий с постоянной линейной скоростью (относительно воздушной среды), описывает, оставаясь в одной и той же горизонтальной плоскости, замкнутый путь (относительно Земли). Показать, что в случае отсутствия ветра самолет потратит на этот путь меньше времени, чем в том случае, когда скорость ветра будет постоянна (по величине и направлению) и отлична от нуля. (Решение — декабрь 1945 г.)

4360 (Free Jamison). Каждый самолет некоторой группы может снабдить в полете своим горючим другой самолет этой группы. Каждый из них имеет полный запас горючего, дающего ему возможность пролететь без заправки одну пятую расстояния вокруг Земли. Приняв, что все они имеют одинаковую постоянную скорость относительно Земли и одну и ту же скорость потребления горючего, что единственная посадочная площадка и единственная площадка, на которой возможно снабжение горючим, есть площадка исходной базы и что можно пренебречь временем, потребным для заправки самолета горючим, определить наименьшее число самолетов, необходимых для того, чтобы один самолет облетел

вокруг Земли, а все остальные вернулись на свою базу. (Решение — апрель 1951 г.)

Е — 943 (S. H. Gould). По аналогии с законом движения планет естественно предположить, что для всякого центрального движения, в предположении, что движущаяся точка никогда не проходит через центр, имеют место следующие обстоятельства: а) расстояние движущейся точки от центра будет максимальным только тогда, когда скорость точки минимальна; б) скорость будет максимальной только тогда, когда расстояние до центра будет наименьшим. Доказать справедливость предположения а) и указать контрпример для предположения б). (Решение — июнь — июль 1951 г.)

Приходится, к сожалению, ограничиться теми примерами, которые приведены выше, хотя сборник содержит еще большое количество задач, которые представляют несомненный интерес.

Если еще принять во внимание, что мы вынуждены были ограничиться по преимуществу теми задачами, содержание которых сравнительно просто и не затрагивает специальных вопросов, и что при отборе примеров не было возможности полностью отрешиться от пристрастия или антипатии рецензента к тому или иному кругу вопросов, то станет ясно, что полное мнение о сборнике может возникнуть только в результате ознакомления с ним самим. Появление его в русском переводе (и, желательно, с решениями хотя бы части задач) будет, несомненно, и полезно и занимательно для разнообразных слоев наших математических читателей.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Ю. В. Геронимус

(Москва)

Modern Mathematics for the Engineer, Edited by E. F. Beckenbach, New York, Toronto, London, 1956, 514 стр.¹⁾.

Так называется книга, вышедшая в свет в 1956 г. в США. Она написана девятнадцатью авторами²⁾, среди которых мы встречаем имена ученых и специалистов, известных русскому читателю по научной литературе. Как следует из заглавия книги, она предназначена для инженеров. Ее цель состоит в том, чтобы познакомить читателя с различными ветвями математической науки, нашедшими непосредственное применение в технике.

В книге затронуты весьма разнообразные области, каждая из которых могла бы явиться (а часто и фактически является) предметом отдельных книг. Поэтому естественно, что стиль изложения, принятый авторами почти всех глав, имеет своеобразный характер. Читатель не найдет в рецензируемой книге сколько-нибудь систематического изложения вопросов, содержащихся в ее обширном оглавлении; каждая глава книги, написанная одним из 19 авторов, представляет собой скорее этюд на соответствующую математическую тему, заключающий в себе формулировку типичных для рассматриваемого раздела математики задач, иллюстрацию методов их решения и истолкование некоторых результатов. Каждая глава оканчивается списком литературы. Большинство ссылок дано на американскую литературу; ряд ссылок сделан на книги и статьи советских авторов: Колмогорова, Хинчина, Мухелишвили, Канторовича, Андронova, Хайкина, Фадеевой и др.

И название книги, и состав ее авторов (в создании книги приняли участие такие крупные ученые, как Курант, Винер, Лефшец), вызывают естественный интерес.

¹⁾ Русский перевод этой книги выйдет в 1959 г. в Издательстве иностранной литературы. Перевод одной из глав книги «Теория игр» помещен в наст. выпуске «Математического просвещения» на стр. 53 — 86.

²⁾ Royal Weller, Solomon Lefschetz, Richard Bellman, John W. Green, Magnus R. Hestenes, Richard Courant, Menahem Schiffer, Ivan Sokolnikoff, Norbert Wiener, H. Frideric Bohneblust, Gilbert W. King, George W. Brown, Louis A. Pipes, John Z. Barnes, Edwin F. Beckenbach, Charles B. Morrey, George E. Forsythe, Charles B. Tompkins, Derrike H. Lehmer.

Содержание книги иллюстрирует в некоторой мере роль, которую играет математика в современной технике. Еще десять-пятнадцать лет назад математический аппарат, которым должен был владеть образованный инженер, сводился к основам теории дифференциальных уравнений, в частности к теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, операционному исчислению, элементам теории функций комплексного переменного и иногда к теории матриц. Именно эти сведения можно найти в популярной книге Кармана и Био «Математические методы в инженерном деле».

Появление быстродействующих электронных вычислительных машин привело к необходимости значительно расширить арсенал математических средств инженера. Если раньше значительное число задач, теоретические методы решения которых были разработаны математиками с достаточной полнотой, оставалось всё же вне поля зрения практиков из-за невозможности получить численный результат в приемлемые сроки, то теперь инженер гораздо чаще обращается к этим задачам, так как при наличии мощной вычислительной техники их решение стало реальным. Но это расширение средств исследования потребовало от инженера значительно более глубокого знания теории, чем раньше. Нелинейные задачи, вариационные методы, теория устойчивости всё чаще и чаще фигурируют в технической литературе и практике.

За последние несколько лет в математике возникли новые области, давшие возможность научно подходить к вопросам, которые раньше решались лишь с помощью нечеткого и зачастую спорного понятия «здравого смысла». Речь идет о выборе разумного образа действия в заданной ситуации с учетом возможных случайных явлений. Главным источником новых результатов подобного рода явилась теория вероятностей. Ее новые ветви — теория случайных функций, теория информации и теория игр — сразу нашли себе применение в технике и в экономике.

Рецензируемая книга, вторая часть которой называется «Вероятностные задачи», отражает в известной степени это новое положение дел и, вследствие этого, резко отличается от ранее появившихся математических книг для инженеров.

Перейдем к изложению содержания книги. Она состоит из трех частей: I. «Математические модели», II. «Вероятностные задачи» и III. «Вычислительные задачи»¹⁾.

Первая часть книги «Математические модели» содержит семь глав.

Глава 1. Линейные и нелинейные колебания (С. Лефшец)

В начале главы дается понятие о гармонических колебаниях, о фазовой плоскости, о линейных колебаниях с демпфированием под воздействием возмущающей силы. Далее излагаются некоторые сведения о

¹⁾ При этом мы более подробно остановимся на второй ее части, представляющей нам особенно интересной.

нелинейных колебаниях, иллюстрируемые теорией мультивibrатора. Изложено понятие о предельном цикле и индексе особой точки обыкновенного дифференциального уравнения. В заключение главы излагается приближенный метод определения частоты и амплитуды автоколебаний, известный в русской литературе как «метод гармонического баланса».

Глава 2. Теория устойчивости (Р. Бэллман)

Это — очень короткая глава, в которой дается сжатое изложение теории устойчивости Ляпунова, включая понятие о характеристических показателях; приводятся достаточные условия ограниченности решения системы линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Глава 3. Внешняя баллистика (Дж. Грин)

Эта глава содержит элементы динамики неуправляемого снаряда. В ней дается понятие об аэродинамических силах и аэродинамических коэффициентах; приводятся элементы теории стрельбы и бомбометания¹⁾.

Глава 4. Вариационное исчисление (М. Хестенс)

Вначале изложены элементарные понятия (функционал, экстремаль, задача о брахистохроне). Далее выводятся необходимые и достаточные условия минимума функционала; разбираются свойства экстремали, излагается принцип Гамильтона для консервативных систем. Следующие параграфы посвящены изопериметрической задаче, задаче со свободными концами и некоторым вариационным задачам специального вида. В конце главы рассказывается о многомерных вариационных задачах; устанавливается связь между гармоническими функциями и задачей о минимизации интеграла Дирихле.

Глава 5. Гиперболические уравнения с частными производными и их приложения (Р. Курант)

В начале главы формулируются следующие условия, необходимые для того, чтобы дифференциальное уравнение в частных производных с граничными и начальными условиями могло описывать реальное явление: существование решения, его единственность и непрерывная зависимость решений от граничных и начальных условий («корректность» постановки задачи). Затем выводится уравнение теплопроводности, возникающее как результат исследования броуновского движения молекул. Далее приводится классификация уравнений с частными производными и исследуется волновое уравнение на прямой, на плоскости и в пространстве. В главе содержится понятие о нелинейных гиперболических уравнениях.

¹⁾ Материал, помещенный в этой главе, представит несомненный интерес для некоторых читателей, но всё же включение этой теоретико-механической главы в книгу, посвященную изложению математических методов, представляется нам неоправданным.

В качестве примера рассмотрено уравнение сжимаемого изотропического потока и разъясняется возникновение ударных волн. В конце главы излагаются приближенные конечно-разностные методы.

Глава 6. Граничные задачи в теории уравнений с частными производными (М. М. Шиффер)

Глава посвящена теории уравнений с частными производными эллиптического типа. В ней рассматриваются задачи с различными типами граничных условий, вводится функция Грина и приводятся основные свойства гармонических функций.

Глава 7. Граничные задачи теории упругости (И. Сокольников)

Эта глава посвящена, в основном, изложению схемы применения теории функции комплексного переменного к решению двумерных задач теории упругости, разработанной Н. И. Muskhelishvili и его учениками¹⁾.

Вторая часть «Вероятностные задачи» содержит пять глав.

Глава 8. Теория прогнозирования (Н. Винер)

Задача о прогнозировании и примыкающая к ней задача о фильтрации случайной функции (или случайной последовательности) является фундаментальной в современной технике связи и в теории автоматического управления. Прогнозировать значение случайной функции $f(t)$ — это значит, — по известным значениям функции $f(t)$ при $t < t_0$ — предсказать значение этой функции при $t > t_0$, учитывая ее вероятностные характеристики. Ясно, что такое предсказание не может быть абсолютно достоверным. Поэтому более точная постановка задачи о прогнозировании имеет следующую форму: *указать способ, при котором математическое ожидание квадрата разности между истинным значением $f(t)$ и предсказанным значением $f^*(t)$ было бы наименьшим по сравнению со всеми другими способами*. Задача о фильтрации состоит в том, чтобы, измеряя значения случайной функции $\psi(t) = f(t) + \eta(t)$, где $f(t)$ — случайный «полезный сигнал», а $\eta(t)$ — случайная «помеха», восстановить значение полезного сигнала $f(t)$, т. е. *указать такой способ находить по значениям $\psi(t)$ значения $f^*(t)$, при котором математическое ожидание квадрата разности $f(t) - f^*(t)$ будет наименьшим*. Объединение этих двух задач приводит к прогнозированию с одновременной фильтрацией.

Укажем на одно из технических приложений теории прогнозирования: по данным радиолокатора, полученным до выстрела (при $t < 0$), предвычислить наиболее вероятное положение цели через T секунд, где T — время полета снаряда ($T > 0$). Такой прогноз положения цели дает возможность прицелиться наилучшим в данных условиях образом. На практике такое прогнозирование выполняется с одновременной фильтрацией.

¹⁾ Автор главы выражает сожаление, что из-за ослабленных культурных связей результаты советских ученых, появившиеся несколько лет назад, стали известны американским ученым лишь совсем недавно.

Другой пример: свести к минимуму помехи при передаче звука или изображения по радио (фильтрация без прогнозирования).

В главе 8 излагается чисто математическая теория прогнозирования в ее основной постановке, именно, когда случайные функции *стационарны*, т. е. когда их вероятностные характеристики не изменяются с течением времени.

К сожалению, эта глава, в отличие от большинства других глав книги, написана весьма неэлементарно. Для ее понимания от читателя требуется знакомство с теорией интеграла Фурье, с элементами теории меры Лебега, теории функций комплексного переменного и некоторыми понятиями геометрии гильбертова пространства.

Трудно предполагать, что эта глава будет доступной для инженера. Она окажется полезной, скорее, математику, уже знакомому с предметом и желающему ознакомиться с изложением, принадлежащим крупнейшему ученому — одному из основоположников этого направления.

Глава 9. Теория игр (Х. Боненблуст)¹⁾

Теория игр, зародившаяся в 30-х годах в работах Дж. Неймана, последние несколько лет развивалась особенно интенсивно. В теории игр решается задача об определении наилучшего образа действий (наилучшей «стратегии») для достижения некоторой цели при наличии противника, действия которого направлены к тому, чтобы помешать достижению этой цели. Одна из задач теории игр, отражающая простейшую ситуацию только что описанного типа, формулируется так. «Игра» *определяется функцией $f(x, y)$, где x и y — переменные (не обязательно числовые), принадлежащие соответственно к некоторым двум множествам, например $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Один из участников игры выбирает x , стараясь увеличить значение $f(x, y)$, а его противник выбирает y , стараясь при этом значение $f(x, y)$ уменьшить. Спрашивается, какие значения x и y должны выбрать участники игры, чтобы в наибольшей степени приблизиться к своей цели, учитывая наличие противника.* Теория игр занимается вопросом о существовании и единственности задач подобного рода и фактическим нахождением этих решений.

Математическая модель, которая была только что изложена, постоянно применяется в вопросах военной техники, тактики, экономики, проектирования и т. д. В качестве примера в главе приведено решение задачи о наиболее выгодном использовании ограниченных сил двумя противниками, один из которых должен защищать n целей различной важности или уязвимости, а другой — атаковать эти же цели. Другие примеры относятся к тактике выбора времени нападения, к выбору наилучшей стратегии в игре типа «покер» и к анализу некоторой модели экономической системы.

¹⁾ Перевод этой главы помещен на стр. 53—86 настоящего выпуска «Математического просвещения».

Глава 10. Прикладная математика и методы исследования операций (Дж. Кинг)

Методы исследования операций — это новая наука, опирающаяся на теорию вероятностей, математическую статистику и теорию игр. Ее задача, так же как и задача теории игр, состоит в указании оптимального образа действий при заданных условиях, но уже не обязательно при наличии противника. В соответствии с характером условий, которые должны учитываться при анализе операций, задачи разделяются на два класса — *детерминированные задачи* (условия фиксированы) и *вероятностные задачи* (условия изменяются случайным образом). Один типичный метод решения детерминированных задач, — так называемое *линейное программирование*, иллюстрирован следующим примером. Требуется, чтобы корм, составленный из разных компонентов, содержал не меньше чем a_i единиц каждого витамина ($i = 1, 2, \dots, m$), где m — общее число витаминов. Сколько единиц каждого компонента должно входить в самый дешевый корм, удовлетворяющий этим условиям (цена единицы каждого компонента и содержание в ней каждого витамина заданы). Такая задача сводится к отысканию экстремума линейной формы в некоторой области многомерного пространства и имеет единственное решение. В главе приведены также некоторые методы решения аналогичных нелинейных задач.

В главе приведен простой пример вероятностной задачи. Газетчик имеет в день в среднем 10 покупателей. Он покупает в типографии номер за две и продает его за три денежные единицы. Непроданные номера составляют его убыток. Анализ показывает, что для достижения наибольшей средней прибыли он должен забирать в типографии ежедневно девять номеров, а не 10, как это может показаться на первый взгляд [эта задача, типичная для исследования операций, рассматривалась Торнтон-Фраем ¹⁾ еще задолго до оформления методов анализа операций в самостоятельную область].

Другие примеры главы посвящены более сложным схемам взаимоотношений поставщиков с клиентами; при этом, разумеется, каждая схема может моделировать ситуации и не с коммерческим содержанием.

Глава 11. Теория динамического программирования (Р. Беллман)

Задачи динамического программирования также возникают в связи с попыткой определить *оптимальное поведение, причем в рассмотрение существенным образом входит время или последовательность действий*.

В начале главы приводится типичная задача, решаемая методами динамического программирования. Пусть к началу первого года для покупки оборудования двух типов имеется некоторая сумма x_1 . На оборудо-

¹⁾ Торнтон-Фрай, Теория вероятностей для инженеров, М. — Л., 1934.

вание типа A затрачивается сумма y_1 , а на оборудование типа B — сумма $x_1 - y_1$. Оборудование типа A допускает выполнение $g(y_1)$, а оборудование типа B $h(x_1 - y_1)$ часов полезных операций в год. К концу года оборудование продается, и на вырученную сумму $x_2 = ay_1 + b(x_1 - y_1)$, где a и b — постоянные ($a < 1$, $b < 1$), производится аналогичным способом покупка нового оборудования на следующий год. Этот процесс повторяется N лет. Задача состоит в определении затрат y_1, y_2, \dots, y_N , при которых общее число часов полезных операций, выполняемых с помощью оборудования типа A и B в течение N лет, становится максимальным.

Задачи подобного рода сводятся к решению функционального уравнения специального вида. В главе приводится доказательство существования и единственности его решения.

Приведенная выше типичная задача может быть усложнена предположением, что число полезных операций (при затратах y и x на оборудование типов соответственно A и B) принимает различные значения с различной вероятностью. Случайными считаются также коэффициенты a и b , характеризующие потери при продаже устаревшего оборудования. Другой тип функциональных уравнений теории динамического программирования — это так называемые «уравнения золотодобычи». Они возникают из анализа рационального использования одной добывающей машины, обслуживающей две шахты. При анализе принимается во внимание вероятность выхода машины из строя.

Глава 12. Метод Монте-Карло (Дж. Браун)

Как известно, различные вероятностные задачи приводят к необходимости вычислять определенные интегралы, решать алгебраические и дифференциальные уравнения и т. д. Идея метода Монте-Карло состоит в том, чтобы, наоборот, *по заданной аналитической задаче: а) попытаться построить вероятностную задачу, решением которой является предложенная аналитическая задача, б) решить эту вероятностную задачу экспериментально, многократно повторяя специально организованный опыт и статистически обрабатывая его результаты.* Полученная таким статистическим способом некоторая вероятностная характеристика и служит приближенным значением решения исходной аналитической задачи. Например, интеграл

$$I = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$
 можно рассматривать как среднее значение функции $g(\xi)$, когда распределение случайной величины ξ определяется плотностью $f(x)$. Таким образом, при достаточно большом N

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N g(\xi_v),$$

где ξ_v ($v = 1, \dots, N$ — различные) — реализация случайной величины ξ с плотностью $f(x)$. На этом пути может быть решено уравнение

Лапласа, линейные уравнения с частными производными более общего вида и многие другие задачи. В конце главы указываются методы получения случайных чисел с заданной плотностью распределения.

Последняя часть книги «Вычислительные задачи» состоит из семи глав и содержит как изложение собственно вычислительных методов, так и ряда общетеоретических вопросов.

Глава 13. Матрицы в инженерном деле (*Л. Пайнс*)

Глава содержит изложение алгебры матриц, правила действий с блочными матрицами, приведение матрицы к диагональной форме; изложена теорема Гамильтона — Кэли о характеристическом многочлене матрицы; описана схема приложения теории собственных значений к нахождению наибольшего корня многочлена. Кроме алгебраических сведений о матрицах, дается понятие о дифференцировании и интегрировании матриц, понятие о функции от матрицы и о решении линейных дифференциальных уравнений с помощью матриц. В заключение излагается схема применения матриц к теории упругости, электротехнике и к задаче о колебаниях.

Глава 14. Применение функциональных преобразований при проектировании (*Дж. Л. Бернс*)

Глава содержит очень краткие сведения о преобразовании Лапласа, Фурье, Мелина, Ганкеля и Бесселя, а также элементарные примеры из теории автоматического регулирования.

Глава 15. Методы конформного отображения (*Э. Беккенбах*)

В главе содержатся основные факты из теории функций комплексного переменного и теории конформных отображений (условия Коши — Римана, теорема Римана и т. д.). В качестве примеров приведены задачи о картографической проекции, о потоке идеальной жидкости, дается понятие о профилях Жуковского.

Глава 16. Нелинейные методы (*Ч. Моррей*)

В начале главы излагается метод Ньютона приближенного решения конечных уравнений и некоторые модификации этого метода. Приводится схема решения систем конечных уравнений (в том числе и линейных). Затем затрагиваются вопросы о приближенном решении обыкновенных дифференциальных уравнений (численное интегрирование, разложение в ряд по малому параметру).

Далее излагается схема вычисления максимумов и минимумов функций по методу спуска. Большой раздел этой главы посвящен вектор-

ной алгебре в n -мерном и бесконечно-мерном линейном нормированном пространстве. Этот аппарат используется затем для решения функциональных уравнений и вариационных задач. Глава содержит добавление с численными примерами, иллюстрирующими изложенные методы.

Глава 17. Что такое релаксационный метод? (Дж. Форсайт)

Эта глава содержит упомянутый в ее названии метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Попутно затрагиваются различные итерационные методы решения систем линейных уравнений.

Глава 18. Метод спуска (Ч. Томпкинс)

Здесь более подробно, чем в 16-й главе, изложена схема отыскания экстремума функции многих переменных или функционала в гильбертовом пространстве методом спуска.

Глава 19. Быстродействующие вычислительные машины (Д. Лемер)

Глава содержит краткие сведения о машинной математике: о непрерывных моделях и машинах дискретного счета. Впрочем, фактическое содержание этой главы почти не соответствует ее названию. В ней речь идет больше о численных методах решения уравнений, чем о приемах работы с математическими машинами.

Итак, перед нами девятнадцать глав, наполненные самым разнообразным математическим содержанием и рассчитанные на читателей с различными интересами и различной подготовкой — нечто вроде «антологии» современной прикладной математики. Ни одна из глав этой книги не может дать читателю исчерпывающих сведений; более того, подбор материала и его расположение в книге и в отдельных главах представляется иногда случайным, иногда неудачным. Чувство неудовлетворенности оставляет, например, весьма формальное и отрывочное изложение основ математического аппарата, применяемого в теории автоматического управления.

И тем не менее, на вопрос, интересна ли и полезна ли рецензируемая книга, следует, безусловно, ответить положительно. Самый жанр книги, избранный ее издателями, представляется весьма привлекательным и должен завоевать себе место в научно-технической литературе. Этот жанр — научный обзор, предназначенный для специалистов, которым уже недостаточно популярных статей и брошюр, но которые не в состоянии начать ознакомление с современными математическими методами непосредственно по специальным руководствам.

Прочитав книгу, подобную рецензируемой, или даже только отдельные главы такой книги, читатель, ознакомится с постановкой задач,

с возможностями той или иной области математики, и сумеет продолжить изучение выбранного им направления по специальной литературе.

Теперь, когда каждая инженерная профессия требует узкой специализации, имеется серьезная угроза сужения научно-технического кругозора инженера. Инженер, стремящийся быть в курсе современной науки, высоко оценит рецензируемую книгу, даже если он и не разберется до конца во всем конгломерате предлагаемых его вниманию фактов и теорий. Особенно полезными представляются главы, popularизирующие вероятностные методы.

Замысел издателей и редактора книги Э. Беккенбаха выполнен авторами отдельных глав, как правило, на весьма высоком уровне. Большею частью изложение рассчитано на читателя, имеющего «классическое» математическое образование, полученное в высшем техническом учебном заведении. Это — элементы математического анализа и теории дифференциальных уравнений. Но фактически от читателя требуется большее: интерес к вопросам теории и умение выбрать из прочитанного математического материала ту его часть, которую возможно приложить к решению инженерно-технических проблем, возникающих у читателя в процессе его собственной практической деятельности.

Как уже отмечалось, недостатком книги являются пробелы в изложении методов, связанных с теорией автоматического управления. А ведь именно эта область техники пользуется математикой особенно интенсивно. Нам кажется, что книга значительно выиграла бы, если бы в нее была включена глава об элементах математической логики, играющей все большую и большую роль в теории автоматического управления, и глава о теории информации. Книга выиграла бы и от более основательного освещения возможностей современных математических машин и более полного изложения особенностей решения математических задач на этих машинах.

Перевод книги «Современная математика для инженеров», выходящей на русском языке в ближайшее время, представляется весьма целесообразным. Ею заинтересуются многие советские инженеры и математики. Надо надеяться, что выход в свет перевода этой книги будет стимулировать появление и в советской научной литературе разнообразных и хороших книг, помогающих инженерам ознакомиться с мощными современными математическими методами.

СОДЕРЖАНИЕ ¹⁾

I. ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ

Л. А. Люстерник. О вычислении значений функций одного переменного. <i>(Окончание)</i>	3
В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович. Очерк основных идей топологии. <i>(Продолжение)</i>	27
Г. Ф. Боненблуст (США). Теория игр. <i>(Перевод с английского Ю. В. Геронимуса, под редакцией В. Б. Орлова)</i>	53
В. Серпинский (Польша). Математика в Польше. <i>(Перевод с французского М. Г. Шестопала)</i>	87
Ф. Балада (Чехословакия). Краткий очерк истории Общества чехословацких математиков и физиков. <i>(Сокращенный перевод с чешского Ю. М. Гайдуга)</i>	95
М. Стоун (США). Математика и будущее науки. <i>(Перевод с английского Л. А. Маркушевич под редакцией А. И. Маркушевича)</i>	111

К вопросу о реформе преподавания математики в средней школе

От редакции	129
В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин, И. М. Яглом. О содержании курса математики в средней школе	131
В. И. Левин. Некоторые вопросы преподавания математики в средней школе	145

Реплики:

1. Не изгонять из школы идей аксиоматического метода *(И. Н. Бронштейн, А. М. Лопшиц)* 151
2. О роли математики в среднем образовании *(А. А. Ляпунов)* 152

II. НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

Х. М. Коган. Об оценке остатков рядов с рекуррентными коэффициентами	155
О. А. Котий. Обобщения изотомического и изогонального соответствий	161
В. Г. Колп. Об одном типе круговой номограммы	171

Краткие сообщения:

1. В. А. Жаров. Об одном характеристическом свойстве равнобедренного треугольника 175
2. И. Г. Мельников. Об одном обобщении критерия Эйзенштейна 177

¹⁾ Материалы, помещенные на стр. 94, 128, 144, 188—196, 212—218, 226—232, 242, 296, в содержание не включены.

III. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ

(Опыт преподавания и педагогический эксперимент)

И. Г. Араманович и С. И. Зетель. О приближении графиков функций кривыми второго порядка	179
[И. С. Градштейн]. Об одном достаточном признаке обращения в нуль определенных интегралов	189
Б. И. Сегал. О локальной предельной теореме теории вероятностей	193
К. Текше (Венгрия). Замечания к теории геометрических построений	197
Краткие сообщения:	
1. М. Б. Балк. Вычисление сумм с помощью взвешивания	205
2. Б. Л. Гинзбург. Упрощение умножения слева направо	207
3. А. В. Кузель. Исследование корней кубического уравнения без использования формул Кардано	208
4. И. Н. Сангир. Два признака делимости на любое нечетное число, не оканчивающееся на 5	209

IV. НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

Ф. Ф. Нагибин. XVI конференция математических кафедр пединститутов зоны Урала	213
М. Л. Смолянский. Совещание преподавателей заочных отделений педагогических институтов РСФСР	219
Л. Я. Цлаф. В объединенном научно-методическом семинаре кафедр математики московских вузов	227
Новости математической науки:	
1. А. А. Мучник — Р. Фридберг. Проблема сводимости перечислимых множеств (А. А. Мучник)	233
2. М. К. Фаге. Эквивалентность обыкновенных линейных дифференциальных операторов (М. К. Фаге)	236
3. Д. Оман. Решение задачи Банга о покрытии выпуклых фигур (И. М. Яглом)	239

V. ЗАДАЧИ

Под редакцией И. М. Яглома

Задачи	243
Решения задач	253

VI. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

В. Г. Ашкингузе. Об учебниках математики для средней школы Германской Демократической Республики	271
Н. М. Бескин. О геометрическом задачнике В. А. Жарова	293
И. М. Яглом. Интересная книга о выпуклых телах и фигурах	297
А. М. Лопшиц. Уникальный сборник задач	301
Ю. В. Геронимус. Современная математика для инженеров	309

**В СЛЕДУЮЩЕМ (ПЯТОМ) ВЫПУСКЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ»
БУДЕТ НАПЕЧАТАНО:**

ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ:

- А. М. Лопшиц. Яков Семенович Дубнов — математик и педагог.
Я. С. Дубнов. Содержание и методы преподавания элементов математического анализа и аналитической геометрии в средней школе.
Я. С. Дубнов. К истории постулата о параллельных в связи с практикой современного преподавания.
П. К. Рашевский. Геометрия и ее аксиоматика.
Николай Бурбаки (Франция). Архитектура математики.

НАУЧНЫЕ И НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ.

НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА:

10 лет работы секции средней школы Московского математического общества. — Международный математический конгресс в Эдинбурге в 1958 году. — Николай Бурбаки. — Новости математической науки.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА:

О двух новых учебниках алгебры для средней школы. — Курс векторного исчисления Я. С. Дубнова —

И ДРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ.